# INVARIANTE KURVENINTEGRALE

## BEI INFINITESIMALEN TRANSFORMATIONEN IN DREI VERÄNDERLICHEN $x$, $y$, $z$ UND DEREN VERWERTUNG.

---

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

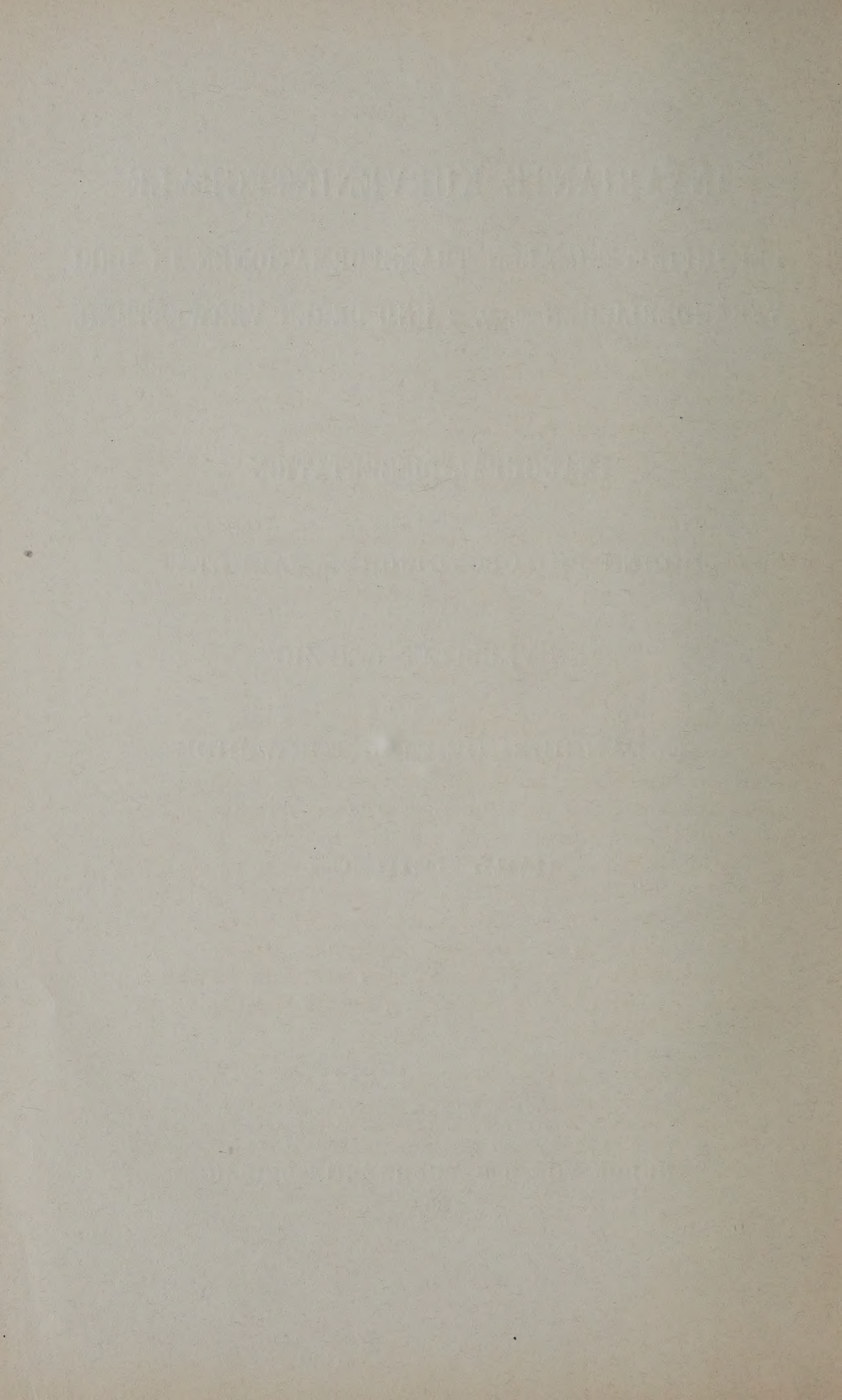
EINGEREICHT VON

**CARL HEINECK**

AUS DRESDEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1899.



# Einleitung.

Nachdem Lie die Theorie der kontinuierlichen Gruppen entwickelt hatte, zeigte er, dafs zu jeder solchen Gruppe Differentialinvarianten $I_1, I_2 \ldots J_1, J_2 \ldots$ gehören, die sich sämtlich aus einer begrenzten Anzahl — einem sogenannten vollen System von Differentialinvarianten — $I_1, I_2, \ldots I_q, J_1, J_2, \ldots J_s$ ableiten lassen.

Diese Theorie bildet zugleich die Grundlage zu der später von Lie veröffentlichten Theorie der Integralinvarianten*) insofern, als es nach Obigem ohne weiteres klar ist, dafs ein Integral der Form

$$\int W\left(I_1, \cdots I_q, J_1 \cdots J_s, \cdots \frac{\partial J_k}{\partial I_l} \cdots\right) dI_1 \cdots dI_q$$

ebenfalls bei der Gruppe invariant bleibt. Es fragt sich noch, ob hiermit alle Integralinvarianten gegeben sind.

Lie veröffentlichte die betreffenden Arbeiten einmal, um den Zusammenhang darzulegen, in welchem verschiedene vorher erschienene Untersuchungen der Herren Żorawsky, Cartan, Hurwitz, Königs, Poincaré**) zu seinen älteren Arbeiten***) ständen, andererseits aber, um zu zeigen, dafs die Frage, welcher Vorteil für die Integration einer Gleichung $Xf = 0$ aus dem Bekanntsein invarianter Integrale gezogen werden könne, sich dem von ihm längst behandelten Problem unterordne, die Bahnkurven einer vorgelegten kontinuierlichen Gruppe zu finden.

---

*) Vgl. Leipziger Berichte 1897, S. 342 ff. Ebendaselbst S. 369 ff.

**) Vgl. Żorawsky, Akademie zu Krakau, April 1893. — Cartan, Bulletin de la Société math. Paris 1896. — Hurwitz, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, März 1897. — Königs, Comptes Rendus, Paris, 9. Dez. 1895. — Poincaré, Acta math. 1890.

***) Norweg. Archiv, Bd. 2, 1877 und Theorie der Trfgr., Bd. I und III; Lie, Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883.

Die vorliegende Arbeit stellt sich nun die Aufgabe, die von Lie in den genannten beiden Abhandlungen allgemein gefundenen Resultate auf einen speziellen Fall, den der Kurven im gewöhnlichen Raume, anzuwenden und hier zu erweitern, beziehentlich zu ergänzen, zugleich aber auch ein Seitenstück zu der eingehender von Lie behandelten Theorie invarianter Flächenintegrale im dreifach ausgedehnten Raum zu bieten.

Daneben wird die Aufstellung sämtlicher Integralinvarianten der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, sowie einer Reihe von Differential- und Integralinvarianten der zehngliedrigen Gruppe aller conformen Transformationen des Raumes $x$, $y$, $z$ erledigt. Endlich werden für die Verwertung invarianter Kurvenintegrale einige neue Resultate gewonnen.

---

# I.

## Allgemeine Theorie der Invarianz von Kurvenintegralen bei infinitesimalen Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Wir betrachten im Folgenden Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int \varphi(x, y, z, y', z', y'', z'' \dots y^{(m)}, z^{(m)})\, dx,$$

worin wir uns $y$ und $z$ als Funktionen von $x$ denken, derart, daſs die $y^{(\mu)}$, $z^{(\nu)}$ die vollständigen Differentialquotienten von $y$ und $z$ nach $x$ von $\mu^{\text{ter}}$, respektive $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung sein sollen. Dann stellt ein Ausdruck von der Form (1) ein Integral $m^{\text{ter}}$ Ordnung dar, erstreckt längs irgend einer Kurve im dreifach ausgedehnten Raume der $x, y, z$.

Soll nun ein solches Integral bei einer infinitesimalen Transformation der Punkte dieses Raumes, dargestellt durch das allgemeine Symbol

$$(2) \quad Xf \equiv \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

invariant bleiben, so muſs nach Lies allgemeiner Definition des Begriffes Integralinvariante die Gleichung bestehen*)

$$X\left(\int \varphi\, dx\right) = \int [X(\varphi) dx + \varphi X(dx)] = 0,$$

d. h. die Variation unseres Integrales vermöge der Transformation $Xf$ muſs verschwinden. Hierzu ist aber nach den Regeln der Variationsrechnung notwendig und hinreichend, daſs die Gleichung

$$X(\varphi)\, dx + \varphi \,.\, X(dx) = 0,$$

oder, nach Vertauschung der Differentiation und Variation im letzten Glied links

$$X(\varphi)\, dx + \varphi \,.\, d\xi = 0$$

---

*) Vgl. hierzu Leipziger Berichte 1897, S. 342 ff.

erfüllt sei. Führen wir schliefslich noch die vollständige Differentiation von $\xi$ aus und bezeichnen wir mit $\xi_x, \xi_y, \xi_z$ die partiellen Differentialquotienten von $\xi$ nach $x, y, z$, so erhalten wir als Invarianzbedingung die folgende

$$(3) \qquad X(\varphi) + \varphi(\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z') = 0.$$

Zur Bildung von $X(\varphi)$ hat man die gegebene Transformation $Xf$ durch Hinzunahme der $y^{(\mu)}$, $z^{(\nu)}$ zu erweitern. Nun sind diese Differentialquotienten definiert durch die Gleichungen

$$dy^{(\mu-1)} - y^{(\mu)} dx = 0, \qquad dz^{(\nu-1)} - z^{(\nu)} dx = 0.$$

Setzen wir daher die Variationen dieser Gleichungen vermöge unseres Operators $Xf$ gleich Null und bezeichnen wir allgemein symbolisch mit $\eta^{(\mu)}$, $\zeta^{(\nu)}$ die Inkremente, die $Xf$ den Differentialquotienten $y^{(\mu)}$, $z^{(\nu)}$ respektive erteilt, so folgen aus

$$X(dy^{(\mu-1)} - y^{(\mu)} dx) = 0, \qquad X(dz^{(\nu-1)} - z^{(\nu)} dx) = 0$$

die Relationen

$$d\eta^{(\mu-1)} - \eta^{(\mu)} dx - y^{(\mu)} d\xi = 0, \qquad d\zeta^{(\nu-1)} - \zeta^{(\nu)} dx - z^{(\nu)} d\xi = 0$$

und hieraus ergiebt sich allgemein

$$(4) \qquad \begin{cases} \eta^{(\mu)} = \dfrac{d\eta^{(\mu-1)}}{dx} - y^{(\mu)} \dfrac{d\xi}{dx}, & (\mu = 1, 2 \ldots m), \\ \zeta^{(\nu)} = \dfrac{d\zeta^{(\nu-1)}}{dx} - z^{(\nu)} \dfrac{d\xi}{dx}, & (\nu = 1, 2 \ldots m). \end{cases}$$

Bezeichnen wir daher jetzt mit $X^{(m)}f$ symbolisch die bis zu den $m^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $y$ und $z$ nach $x$ erweiterte Form $Xf$, setzen wir also

$$(5) \quad X^{(m)}f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'} + \cdots$$
$$\cdots + \eta^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} + \zeta^{(m)} \frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

so können wir unsere bisherigen Ergebnisse zusammenfassen in dem folgenden

**Theorem I.** *Soll ein Kurvenintegral*

$$\int \varphi(x, y, z, y', z', y'', z'' \ldots y^{(m)}, z^{(m)})\, dx$$

*bei einer kontinuierlichen Gruppe, deren infinitesimale Transformation durch das Symbol*

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

*dargestellt wird, invariant bleiben, so mufs die Gleichung*

$$X^{(m)}(\varphi) + \varphi(\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z') = 0$$

*bestehen. Hierin ist allgemein*

$$X^{(m)}f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'} + \cdots + \zeta^{(m)} \frac{\partial f}{\partial z^{(m)}},$$

*wo* $\eta^{(m)}$ *und* $\zeta^{(\nu)}$ *durch die Gleichungen*

$$\eta^{(\mu)} = \frac{d\eta^{(\mu-1)}}{dx} - y^{(\mu)} \frac{d\xi}{dx}, \quad (\mu = 1, 2 .., m),$$

$$\zeta^{(\nu)} = \frac{d\zeta^{(\nu-1)}}{dx} - z^{(\nu)} \frac{d\xi}{dx}, \quad (\nu = 1, 2 \ldots m)$$

*bestimmt sind.* —

Bevor wir hier weitergehen, wollen wir an die oben gefundenen Resultate noch einige einfache Folgerungen knüpfen. Zunächst läfst sich die Gleichung

$$X(\varphi dx) = 0$$

auch so deuten, dafs man sagen kann: *Der Ausdruck* $\varphi dx$ *mufs eine Differentialinvariante der Transformation* $Xf$ *sein, damit das vorgelegte Integral* (1) *bei der letzteren invariant bleibe.* Wir werden nachher für diese Sachlage einen noch präziseren Ausdruck finden.

Weiter folgt nach unserem Theorem I unmittelbar der

**Satz 1.** *Ist ein Kurvenintegral*

$$\int \varphi(x, y, z, y', z', y'', z'' \ldots y^{(m)}, z^{(m)})\, dx$$

*bei einer infinitesimalen Transformation*

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

*invariant, so gilt dasselbe auch von der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2} \cdots \frac{d^{(m)}y}{dx^m}, \frac{d^{(m)}z}{dx^m}\right) = 0,$$

*und zwar besteht die Relation*

$$X^{(m)}(\varphi) = -(\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z')\varphi.$$

Endlich fällt an unserer Bedingungsgleichung noch der folgende spezielle Fall leicht in die Augen, den wir deshalb der Einfachheit halber gleich hier mit erledigen wollen. Es ergiebt sich nämlich ohne weiteres

**Satz 2.** *Für jede infinitesimale Transformation*

$$Xf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

*bei der* $\xi = const$ *ist, liefert jede Differentialinvariante von Kurven*

$$\varphi(x, y, z, y', z', y'', z'' \ldots y^{(n)}, z^{(n)} \ldots)$$

*zugleich ein invariantes Kurvenintegral der Form*

$$\int \varphi \, dx$$

*und umgekehrt.* —

Es liege nun allgemein eine $r$gliedrige kontinuierliche Gruppe vor, gegeben durch die infinitesimalen Transformationen

$$(6) \quad X_k f \equiv \xi_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(k = 1, 2 \ldots r).$$

Die Forderung, daſs ein Integral der Form (1) bei unserer Gruppe invariant bleibe, kommt dann darauf hinaus, daſs die Gröſse $\varphi$ die $r$ Gleichungen

$$(7) \qquad X_k^{(m)}(\varphi) + \varphi(\xi_{k_x} + \xi_{k_y} y' + \xi_{k_z} z') = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

erfülle. Diese Gleichungen definieren einerseits bei vorgelegter Integralinvariante die Gruppe, welche dieselbe invariant läſst — wie überhaupt jedes Gebilde, wenn wir die Forderung seiner Invarianz bei den einer unendlichen Gruppe angehörigen Transformationen aufstellen, eine Gruppe von Transformationen bestimmt —; andererseits liefern uns die Gleichungen (7) bei vorgelegter Gruppe die zugehörigen Kurvenintegralinvarianten.

Die Bestimmung der letzteren führt zunächst auf die Frage, ob unsere obigen Gleichungen überhaupt gemeinsame

Lösungen besitzen. Die Frage deckt sich aber nach längst bekannten Prinzipien mit jener, ob die linearen partiellen und homogenen Differentialgleichungen

$$(8) \qquad Y_k f \equiv X_k^{(m)} f - \varphi(\xi_{k_x} + \xi_{k_y} y' + \xi_{k_z} z') \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

gemeinsame Lösungen besitzen, eine Untersuchung, die bereits von Lie in allgemeinster Weise erledigt ist*). Es gilt nämlich

**Satz 3.** *Bilden die $r$ infinitesimalen Transformationen in den Veränderlichen $x, y, z$*

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

*eine Gruppe, so erzeugen auch die infinitesimalen Transformationen*

$$Y_k f \equiv X_k^{(m)} f - \varphi (\xi_{k_x} + \xi_{k_y} y' + \xi_{k_z} z') \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

*eine $r$gliedrige Gruppe und zwar in den Veränderlichen $x, y, z, y', z' \ldots y^{(m)}, z^{(m)}, \varphi$. Diese ist gleich zusammengesetzt mit der Gruppe der $Xf$.*

Wir wollen für diesen unseren speziellen Fall einen einfachen Beweis des eben ausgesprochenen Satzes geben. Bilden wir nämlich den Klammerausdruck zweier beliebiger $Yf$, die wir schreiben wollen

$$(9) \qquad Y_i f \equiv X_i^{(m)} f - \varphi \frac{d\xi_i}{dx} \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$(10) \qquad Y_k f \equiv X_k^{(m)} f - \varphi \frac{d\xi_k}{dx} \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

so folgt nach bekannten Regeln

$$Y_i Y_k f - Y_k Y_i f$$
$$= (X_i^m X_k^m) - \left( Y_i \left( \varphi \frac{d\xi_k}{dx} \right) - Y_k \left( \varphi \frac{d\xi_i}{dx} \right) \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

wo

$$(X_i^{(m)} X_k^m) \equiv (X_i X_k)^m \equiv \left( X_i^{(m)}(\xi_k) - X_k^{(m)}(\xi_i) \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots$$
$$\cdots + \left( X_i^{(m)}(\zeta_k^{(m)}) - X_k^{(m)}(\zeta_i^{(m)}) \right) \frac{\partial f}{\partial z^{(m)}}$$

---

*) Vgl. Leipziger Berichte. 1895. S. 307—308.

ist. Wir haben also nur zu beweisen, dafs die Identität

$$\varphi \frac{d}{dx}\left(X_i^{(m)}(\xi_k) - X_k^{(m)}(\xi_i)\right) \equiv Y_i\left(\varphi \frac{d\xi_k}{dx}\right) - Y_k\left(\varphi \frac{d\xi_i}{dx}\right)$$

besteht. Hierin wird aber mit Berücksichtigung von (9) und (10)

$$Y_i(\varphi)\frac{d\xi_k}{dx} - Y_k(\varphi)\frac{d\xi_i}{dx} \equiv 0,$$

so dafs nur noch zu beweisen übrig bleibt

$$(11) \quad \frac{d}{dx}\left(X_i^{(m)}(\xi_k) - X_k^{(m)}(\xi_i)\right) \equiv Y_i\left(\frac{d\xi_k}{dx}\right) - Y_k\left(\frac{d\xi_i}{dx}\right).$$

Nun ist nach (9) und (10)

$$Y_i\left(\frac{d\xi_k}{dx}\right) - Y_k\left(\frac{d\xi_i}{dx}\right) \equiv X_i^{(m)}\left(\frac{d\xi_k}{dx}\right) - X_k^{(m)}\left(\frac{d\xi_i}{dx}\right)$$

$$\equiv \frac{dx\, X_i^{(m)}(d\xi_k) - d\xi_k X_i^{(m)}(dx)}{dx^2} - \frac{dx\, X_k^{(m)}(d\xi_i) - d\xi_i X_k^{(m)}(dx)}{dx^2},$$

oder nach Vertauschung von Variation und Differentiation rechts

$$Y_i\left(\frac{d\xi_k}{dx}\right) - Y_k\left(\frac{d\xi_i}{dx}\right)$$

$$\equiv \frac{dx\,.\,dX_i^{(m)}(\xi_k) - d\xi_k d\xi_i - dx\, dX^{(m)}(\xi_i) + d\xi_i d\xi_k}{dx^2}$$

$$\equiv \frac{d}{dx}\left(X_i^{(m)}(\xi_k) - X_k^{(m)}(\xi_i)\right),$$

d. h. die Identität (11) ist in der That erfüllt. —

Nachdem dies bewiesen ist, ist die Auffindung der Integralinvarianten von Kurven bei einer vorgelegten Gruppe (6) einfach darauf zurückgeführt, die Invarianten der aus der ursprünglichen Gruppe hervorgegangenen Gruppe der $Yf$ zu bestimmen. Jede durch Lösung des vollständigen Systemes (8) gefundene Differentialinvariante, welche $\varphi$ enthält, liefert uns nach $\varphi$ aufgelöst $\varphi$ gleich einer Funktion $\varphi(x,y,z,y',z'\dots)$ multipliziert mit einer Konstanten und mithin, da es bei der Integration auf die letztere nicht ankommt, eine Integralinvariante

$$\int \varphi(x, y, z, y', z' \dots)\, dx$$

der vorgelegten Gruppe erstreckt längs Kurven. In dieser Weise findet man alle Integralinvarianten von Kurven bei der

Gruppe der $Xf$, und da eine endliche kontinuierliche Gruppe unendlich viele Differentialinvarianten von Kurven besitzt, so erkennt man, dafs sie auch unendlich viele Kurvenintegralinvarianten haben mufs. Insbesondere kann $m$ von einem gewissen Anfangswerte an, der von der Art der gerade vorgelegten Gruppe abhängt, stets so gewählt werden, dafs Integralinvarianten $m^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden sind.

Ist dagegen die vorgelegte Gruppe unendlich, so verlangt die Beantwortung der Frage, ob sie Kurvenintegrale invariant läfst, in jedem Falle eine besondere Untersuchung. Wir werden in einem späteren Abschnitt ausführlicher dieses Problem erörtern. Allgemein, für endliche wie unendliche kontinuierliche Gruppen, gilt jedoch das folgende von Lie bereits im allgemeinsten Fall bewiesene*) Theorem, das für die Aufstellung aller invarianten Integrale einer Gruppe von grofser Bedeutung ist, und das wir daher hier für unseren speziellen Fall formulieren wollen, wie folgt:

**Theorem II.** *Liegt eine endliche oder unendliche kontinuierliche Gruppe in den Veränderlichen $x, y, z$ vor und ist*

$$\int \varphi(x, y, z, y', z', y'', z'' \dots y^{(m)}, z^{(m)})\, dx$$

*eine bekannte Integralinvariante derselben erstreckt längs Kurven, während*

$$\Omega(x, y, z, y', z', y'' \dots y^{(n)}, z^{(n)})$$

*irgend eine Differentialinvariante unserer Gruppe bei Kurven bezeichnet, so liefert die allgemeine Formel*

$$\int \Omega . \varphi\, dx$$

*alle Integralinvarianten der Gruppe erstreckt längs Kurven.*

Der Beweis ist äufserst einfach. Denn sind

$$\int \varphi\, dx \quad \text{und} \quad \int \varphi_1\, dx$$

zwei invariante Integrale bei der betreffenden Gruppe $Xf$, so bestehen die beiden Relationen

$$X(\varphi) + \varphi \frac{d\xi}{dx} = 0,$$

$$X(\varphi_1) + \varphi_1 \frac{d\xi}{dx} = 0,$$

---

*) Vgl. Leipziger Berichte 1897. S. 347 f.

und aus ihnen folgt ohne weiteres

$$X\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right) = 0,$$

d. h. es ist das Verhältnis der beiden Gröfsen $\varphi$ und $\varphi_1$ eine Differentialinvariante der Gruppe.

Hiermit brechen wir vorerst unsere theoretischen Erörterungen ab, um zunächst eine Anwendung der bisher gegebenen Theorie auf einige einfache aber wichtige Beispiele zu geben. Die Resultate, zu denen wir dabei gelangen werden, sind zum Teil schon längst bekannt. Indessen mögen die folgenden Betrachtungen die Bedeutung und Nützlichkeit unserer Theorie veranschaulichen.

1. *Beispiel.* Es soll die Kurvenintegralinvariante niedrigster Ordnung der sechsgliedrigen Gruppe der Nichteuklidischen Bewegungen bestimmt werden, welche die Fläche zweiten Grades

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

invariant lassen.

Die vorgelegte Gruppe setzt sich bekanntlich*) zusammen aus den sechs infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f \equiv y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f \equiv z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_3 f \equiv x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$X_4 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$X_5 f \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$X_6 f \equiv \frac{\partial f}{\partial z} + z\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Erweitern wir diese noch für die ersten Differentialquotienten $y'$ und $z'$, so werden die Gleichungen (8) hier

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} - (1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} - z'y'\frac{\partial f}{\partial z'} - y'\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

$$z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial z'} = 0,$$

$$-z\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial z} + z'y'\frac{\partial f}{\partial y'} + (1+z'^2)\frac{\partial f}{\partial z'} + z'\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(1+x^2)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial f}{\partial z} + (y-xy')\frac{\partial f}{\partial y'} + (z-xz')\frac{\partial f}{\partial z'} - 2x\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

*) Vgl. Transformationsgruppen Bd. III, S. 504 f.

$$xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}+yz\frac{\partial f}{\partial z}+y'(y-xy')\frac{\partial f}{\partial y'}$$
$$+y'(z-xz')\frac{\partial f}{\partial z'}-\varphi(y+xy')\frac{\partial f}{\partial \varphi}=0,$$
$$xz\frac{\partial f}{\partial x}+yz\frac{\partial f}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial f}{\partial z}+z'(y-xy')\frac{\partial f}{\partial y'}$$
$$+z'(z-xz')\frac{\partial f}{\partial z'}-\varphi(z+xz')\frac{\partial f}{\partial \varphi}=0.$$

Es ist dieses ein sechsgliedriges vollständiges System in den sechs Variabelen $x, y, z, y', z', \varphi$. Die Matrix verschwindet indessen identisch, während ihre fünfreihigen Unterdeterminanten nicht verschwinden. Unser System besitzt daher eine und nur eine Lösung, die notwendig auch $\varphi$ enthält. Man findet durch Integration die Lösung

$$\frac{(1+x^2+y^2+z^2)\varphi^2}{1+y'^2+z'^2+(xy'-y)^2+(yz'-zy')^2+(xz'-z)^2}=\text{const.}$$

Aus ihr ergiebt sich

$$\varphi=c\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2+(xy'-y)^2+(yz'-zy')^2+(xz'-z)^2}{1+x^2+y^2+z^2}},$$

und, da es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, so besitzt das gesuchte invariante Integral die Form

$$I=\int\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2+(xy'-y)^2+(yz'-zy')^2+(xz'-z)^2}{1+x^2+y^2+z^2}}\,dx.$$

Es stellt die invariante Bogenlänge der Kurven dar*).

Nach unserem Satz 1 folgern wir noch, daſs die gewöhnliche Differentialgleichung

$$1+y'^2+z'^2+(xy'-y)^2+(yz'-zy')^2+(xz'-z)^2=0$$

bei unserer Gruppe invariant bleibt. Diese ist aber identisch mit der Mongeschen Gleichung

$$dx^2+dy^2+dz^2+(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2$$
$$+(xdz-zdx)^2=0,$$

die bekanntlich bei der vorgelegten Gruppe ihre Form bewahrt.

2. *Beispiel.* Es sollen die Kurvenintegralinvarianten der Gruppe der Euklidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes aufgestellt werden.

---

*) Vgl. Transformationsgruppen Bd. III, S. 410.

Die zu untersuchende Gruppe wird bekanntlich von den sechs infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f \equiv \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_4 f \equiv y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f \equiv z \frac{\partial f}{dy} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_6 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x}$$

erzeugt. Die niedrigste Integralinvariante ist von erster Ordnung. Man findet sie durch Lösung des vollständigen Systemes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} - (1 + y'^2) \frac{\partial f}{\partial y'} - y' z' \frac{\partial f}{\partial z'} - y' \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

$$z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} + z' \frac{df}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial z'} = 0,$$

$$-z \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} + y' z' \frac{\partial f}{\partial y'} + (1 + z'^2) \frac{\partial f}{\partial z'} + z' \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

dessen Matrix identisch verschwindet. Die Integration ergiebt als Lösung

$$\frac{\varphi}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c,$$

d. h. die niedrigste Integralinvariante hat die Form

$$\int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Zur Aufstellung der Integralinvarianten höherer Ordnung brauchen wir nun, wie uns Theorem II lehrt, nur noch alle Differentialinvarianten von Kurven bei unserer Gruppe. Diese sind aber, ebenso wie unser invariantes Integral, längst bekannt. Erweitern wir die Gleichungen unseres Systemes noch für die Differentialquotienten $y''$ und $z''$, so erhalten wir eine weitere Lösung, die Differentialinvariante zweiter Ordnung

$$\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y' z'' - z' y'')^2 + y''^2 + z''^2}},$$

bekanntlich der Krümmungsradius $r$ unserer Kurven. Die folgende Erweiterung liefert sodann zwei fernere Lösungen, die mit den Gröfsen $\tau$ und $\frac{dr}{ds}$ identisch sind, wenn $\tau$ die Torsion der Kurven bezeichnet. Die allgemeine Differential-

invariante $m^{\text{ter}}$ Ordnung von Kurven bei unserer Gruppe hat sodann, wie Lie gezeigt hat*), die Form

$$\Omega\left(r\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}\cdots\frac{d^{m-2}r}{ds^{m-2}};\ \tau, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}\cdots\frac{d^{m-3}\tau}{ds^{m-3}}\right).$$

Hiernach können wir das allgemeine invariante Kurvenintegral $m^{\text{ter}}$ Ordnung ohne weiteres hinschreiben. Es lautet

$$\int\Omega\left(r\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}\cdots\frac{d^{m-2}r}{ds^{m-2}};\ \tau, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}\cdots\frac{d^{m-3}\tau}{ds^{m-3}}\right)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

und alle Kurvenintegralinvarianten unserer Gruppe müssen sich auf diese Form bringen lassen.

Wir bemerken noch, dafs wir unsere invarianten Integrale auch in der Gestalt

$$\int\Omega\,ds$$

schreiben können, wo $\Omega$ dieselbe Funktion wie oben und $ds$ das Bogenelement der Kurven bezeichnet. Wir werden später, in der Fortsetzung der allgemeinen Theorie, ausführlicher auf diese Bemerkung zurückkommen.

3. *Beispiel.* Es sollen alle Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes bestimmt werden, die ein Bogenintegral der Form

$$\int\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

invariant lassen.

Die hier gestellte Aufgabe ist die Umkehrung der früheren, indem das invariante Integral von vornherein gegeben und die Gruppe gesucht ist, die dessen Form bewahrt. Sie bietet zugleich eine interessante Analogie zu dem vor einiger Zeit von Herrn Carda**) auf mehrfache Weise erledigten Problem: Alle Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes zu bestimmen, die alle Flächeninhalte invariant lassen. Es wird sich zeigen, dafs wir hier zu denselben Transformationen gelangen, die dort gefunden wurden.

Nehmen wir an, es sei die allgemeine infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

---

*) Vgl. Lie-Scheffers, Kontinuierliche Gruppen. S. 674 ff.

**) Vgl. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, 1896. S. 787 ff. Vgl. ferner Monatshefte für Mathematik und Physik, 1897. S. 170 ff.

von der gesuchten Art, so wird mit Berücksichtigung der Formeln (4) die einmal erweiterte Transformation

$$X'f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right) \frac{\partial f}{\partial y'} + \left(\frac{d\zeta}{dx} - z' \frac{d\xi}{dx}\right) \frac{\partial f}{\partial z'},$$

und es mufs nach Voraussetzung die Gleichung

$$X'\left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\right) + \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0$$

oder ausgerechnet

$$y'(\eta_x + \eta_y y' + \eta_z z') + z'(\zeta_x + \zeta_y y' + \zeta_z z') + (\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z') = 0$$

identisch, d. h. für alle Werte von $y'$, $z'$ bestehen. Wir erhalten daher aus dieser Gleichung zur Bestimmung von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die folgenden Relationen

$$\xi_x = \eta_y = \zeta_z = 0,$$
$$\eta_x + \xi_y = 0, \quad \zeta_x + \xi_z = 0, \quad \eta_z + \zeta_y = 0.$$

Diese, sechs im ganzen, sind vollkommen unabhängig von einander, also sämtlich wesentlich. Wir haben sie geradezu als die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe aufzufassen. Sie enthalten die sämtlichen neun ersten partiellen Differentialquotienten von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und diese Gröfsen selbst bestimmen sich demnach aus ihnen mit Hilfe von sechs willkürlichen Konstanten.

Man findet durch Integration $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als lineare Funktionen in $x$, $y$, $z$ in der Form

$$\xi = \alpha y - \beta z + a,$$
$$\eta = -\alpha x + \gamma z + b,$$
$$\zeta = -\gamma y + \beta x + c,$$

worin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$, $c$ willkürliche Konstante sind. Die gesuchten infinitesimalen Transformationen haben daher die Form

$$Xf \equiv (\alpha y - \beta z + a) \frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma z - \alpha x + b) \frac{\partial f}{\partial y} + (\beta x - \gamma y + c) \frac{\partial f}{\partial z}$$

und setzen sich mithin, den sechs willkürlichen Konstanten

entsprechend, aus den sechs von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}, \quad z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}$$

zusammen. Wir erkennen in den letzteren die Euklidischen Bewegungen unseres Raumes. Es hat sich also ergeben:

*Die einzigen Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes, die das Bogenintegral*

$$\int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

*invariant lassen, sind die Euklidischen Bewegungen.*

In anderen Worten:

Die Euklidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes $x, y, z$ lassen sich als diejenigen Punkttransformationen definieren, die das Bogenintegral

$$\int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

invariant lassen*).

---

## II.

## Ableitung der Integralinvarianten aus Differentialinvarianten und Erledigung der Theorie für unendliche Gruppen.

Bereits im ersten Abschnitt bemerkten wir, daſs bei unendlichen Gruppen, d. h. bei solchen vorgelegten infinitesimalen Transformationen, in deren Inkrementen $\xi, \eta, \zeta$ willkürliche Funktionen auftreten, die Frage nach den invarianten Kurvenintegralen sich nicht allgemein beantworten läſst, sondern in jedem Falle einer besonderen Untersuchung bedarf. Von Wichtigkeit ist hierbei insbesondere, wie schon unser Theorem II lehrt, die Beantwortung der Frage, ob die vorgelegte Gruppe Differentialinvarianten von Kurven besitzt. Hat sie solche, gleichviel in welcher Anzahl, so werden wir zeigen, daſs sie

*) Vgl. hierzu Lie: Leipz. Ber. 1886, S. 341f. 1890, S. 356ff. Über die Grundlagen der Geometrie. Ferner, Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, Kap. 22, 23.

dann auch immer Integralinvarianten von Kurven besitzt, und zwar sogar unendlich viele. Dagegen kann sehr wohl auch der Fall eintreten, daſs keine Differentialinvarianten der gesuchten Art vorhanden sind. Wir werden diese verschiedenen Möglichkeiten an einigen speziellen Beispielen zeigen. Weiterhin wird es uns durch einige interessante, in der Natur der Sache liegende Umformungen gelingen, die Aufstellung unserer Integralinvarianten im allgemeinen auf die Ermittelung von Differentialinvarianten allein zurückzuführen, worauf wir mit einem Schlage die Integralinvarianten derjenigen vorher betrachteten Gruppen, welche Differentialinvarianten besitzen, werden hinschreiben können. Endlich werden wir alle überhaupt möglichen Fälle in den Kreis der Betrachtung ziehen.

Fassen wir etwa die unendliche Gruppe aller Transformationen vom Symbol

$$\zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

ins Auge, wo $\zeta$ eine beliebige Funktion seiner Argumente $x, y, z$ sei. Sie besitzt offenbar die beiden Differentialinvarianten nullter Ordnung $x$ und $y$. Nach den allgemeinen Regeln für die Berechnung der Differentialinvarianten von Kurven sind dann auch sämtliche Ableitungen von $y$ nach $x$, d. h. die Gröſsen $y', y'' \dots y^{(m)} \dots$ Differentialinvarianten. Unsere Gruppe hat also deren unendlich viele. Andere, als die genannten, giebt es indessen nicht bei ihr. Denn erweitert man, so erhält man durch Gleichnullsetzen der Koeffizienten der einzelnen partiellen Ableitungen von $\zeta$ die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z''} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z^{(n)}} = \dots = 0.$$

Wir haben also gefunden, *daſs die allgemeinste Differentialinvariante von Kurven bei unserer Gruppe die Form*

$$\Omega(x, y, y', y'' \dots y^{(m)} \dots)$$

*hat**).

Ein hiervon abweichendes Beispiel gewährt uns die unendliche Gruppe aller Transformationen

$$x_1 = x, \quad y_1 = \varphi(x, y, z), \quad z_1 = \chi(x, y, z)$$

*) Vgl. Lie, Leipziger Berichte 1897, S. 371 ff.

mit dem allgemeinen Symbol

$$\eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2}$$

Zwar finden wir hier sofort eine Differentialinvariante nullter Ordnung, nämlich $x$, indessen ergiebt sich keine weitere; denn sämtliche Gröfsen

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''} \cdots \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} \cdots, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z'}, \frac{\partial f}{\partial z''} \cdots \frac{\partial f}{\partial z^{(n)}} \cdots$$

werden aus dem gleichen Grunde wie im vorigen Beispiel gleich Null. Wir erhalten also das Resultat:

*Die allgemeinste Differentialinvariante von Kurven bei unserer Gruppe* (2) *hat die Form*

$$\Omega(x).$$

Betrachten wir schliefslich die unendliche Gruppe aller volumentreuen Transformationen unseres Raumes*)

$$\xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{3}$$

wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ allein durch die Relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

gebunden sind, so ist leicht einzusehen, dafs zu dieser Gruppe überhaupt keine Differentialinvariante von Kurven, ja nicht einmal eine invariante gewöhnliche Differentialgleichung

$$W(x, y, z, y', z' \ldots y^{(m)}, z^{(m)}) = 0$$

gehören kann. Denn wäre

$$y = \varphi(x), \qquad z = \chi(x)$$

eine Integralkurve einer solchen invarianten Differentialglei chung $W = 0$ und

$$y = \Phi(x), \qquad z = X(x)$$

irgend eine beliebige Kurve des Raumes, welche die Gleichung $W = 0$ nicht befriedigt, so würde die Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \Phi(x) - \varphi(x), \quad z_1 = z + X(x) - \chi(x),$$

die offenbar unserer Gruppe angehört, die erstere Kurve in die letztere überführen. Das steht aber mit der vorausgesetzten

*) Vgl. an letztcitierter Stelle.

Invarianz von $W = 0$ im Widerspruch. Es giebt also keine invariante gewöhnliche Differentialgleichung bei unserer Gruppe. Somit hat sich ergeben:

*Die unendliche Gruppe aller volumentreuen Punkttransformationen besitzt keine Differentialinvarianten von Kurven.*

Man wird aus diesen Beispielen erkennen, daſs wir hier mehrere wesentlich von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden haben. Indessen genügt das bisher Gefundene bereits, um den folgenden Satz aufzustellen.

**Satz 1.** *Eine unendliche Gruppe in den Veränderlichen $x$, $y$, $z$ besitzt entweder keine oder eine oder unendlich viele von einander unabhängige Differentialinvarianten von Kurven.*

Wir wollen nun zeigen, daſs mit Auffindung der Differentialinvarianten im allgemeinen bei endlichen wie unendlichen Gruppen das Problem der Aufstellung aller Integralinvarianten erledigt ist. Denn gesetzt, wir hätten bei irgend einer vorgelegten kontinuierlichen Gruppe drei Differentialinvarianten von Kurven — es seien etwa diejenigen niedrigster Ordnung — gefunden. Bezeichnen wir diese etwa mit $I$, $J_1$, $J_2$, so bilden diese drei Gröſsen im allgemeinen ein sogenanntes volles System von Differentialinvarianten, d. h. jede weitere Differentialinvariante unserer Art kann vermöge derselben berechnet und in der Form

$$U\left(I,\ J_1,\ J_2,\ \frac{dJ_1}{dI},\ \frac{dJ_2}{dI},\ \frac{d^2J_1}{dI^2}\cdots\right)$$

geschrieben werden. Wir denken uns hierbei die Gröſse $I$ als Koordinate längst der Kurven eingeführt. Jeder Punkt der letzteren ist dann durch einen bestimmten Wert von $I$ definiert, und alle Funktionen seiner Koordinaten und ihrer Ableitungen längs der Kurven stellen sich ebenfalls als Funktionen von $I$ dar. Jedes Kurvenintegral, gleichviel, ob es bei unserer Gruppe invariant bleibt oder nicht, muſs sich dann auf die Form

$$\int W . dI$$

bringen lassen. Soll es insbesondere bei der vorgelegten Gruppe $Xf$ invariant bleiben, so folgt aus dem Bestehen der Gleichung

$$X(W) . dI + W . dX(I) = 0$$

wegen der Voraussetzung

$$X(I) = 0,$$

dafs die Gröfse $W$ eine Differentialinvariante der Gruppe, in unserem Falle also eine Funktion der Argumente

$$I, J_1, J_2, \frac{dJ_1}{dI}, \frac{dJ_2}{dI}, \frac{d^2J_1}{dI} \cdots \frac{d^{(m)}J_2}{dI^m} \cdots$$

sein mufs. Hiernach nimmt aber das allgemeine bei unserer Gruppe invariante Kurvenintegral die Form an

$$\int U\left(I, J_1, J_2, \frac{dJ_1}{dI}, \frac{dJ_2}{dI}, \frac{d^2J_1}{dI^2} \cdots\right) dI.$$

Wir gelangen sonach mit Berücksichtigung von Satz 1 zu dem allgemeinen

**Theorem III.** *Liegt eine kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x, y, z$ vor, die auf die Kurven dieses Raumes*

$$y = \varphi(x), \quad z = \chi(x)$$

*angewandt werden, so ist es in zwei Fällen immer möglich, die allgemeine Form aller zugehörigen Integralinvarianten anzugeben.*

*Besitzt die Gruppe mehr als eine Differentialinvariante*

$$V(x, y, z, y', z', y'', z'' \ldots y^{(m)}, z^{(m)}),$$

*so können, wenn*

$$I, J_1 \ldots J_s$$

*passend gewählte Invarianten bezeichnen, die ein volles System bilden, alle weiteren Differentialinvarianten auf die Form*

$$U\left(I, J_1 \cdots J_s, \frac{dJ_1}{dI}, \frac{dJ_2}{dI} \cdots\right)$$

*gebracht werden; dann ist*

$$\int W\left(I, J_1 \cdots J_s, \frac{dJ_1}{dI} \cdots \frac{dJ_s}{dI}, \frac{d^2J_1}{dI^2} \cdots\right) dI$$

*die allgemeine Form der Kurvenintegralinvarianten.*

*Besitzt andererseits die vorgelegte Gruppe eine und nur eine Differentialinvariante*

$$I(x, y, z, y', z' \ldots y^{(m)}, z^{(m)}),$$

*so ist*

$$\int W(I)\, dI$$

*die allgemeine Form der bei ihr invarianten Kurvenintegrale.*

Dieses Theorem wurde von Lie in der letztzitierten Arbeit in seiner allgemeinsten Fassung, für $n$fache Räume und $q$ dimensionale Mannigfaltigkeiten aufgestellt. Es führt, wie man sieht, die Aufstellung sämtlicher Integralinvarianten im allgemeinen auf die Ermittelung von Differentialinvarianten allein zurück. Wir werden indessen später noch einige weitere Möglichkeiten zu betrachten haben. Das Theorem II verlangte dagegen die vorherige Ermittelung einer Integralinvariante, d. h. einer Lösung des vollständigen Systemes (8) auf Seite 9, die $\varphi$ enthält. Dies macht aber in jedem einzelnen Fall erst eine Diskussion der Matrix dieses vollständigen Systemes erforderlich, ehe eine definitive Antwort auf die Frage nach der Existenz von Integralinvarianten gegeben werden kann. Wir haben dies an den Beispielen am Schlusse des vorigen Abschnittes gezeigt. Unser Theorem III erklärt nun auch die daselbst am Ende des zweiten Beispiels gemachte Bemerkung, dafs sich die Kurvenintegralinvarianten der Gruppe der Euklidischen Bewegungen sämtlich auf die Form

$$\int \Omega\left(r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2} \cdots, \tau, \frac{d\tau}{ds}, \cdots\right) ds$$

bringen lassen; denn wir haben hier offenbar nur

$$I = r, \quad J_1 = \frac{dr}{ds}, \quad J_2 = \tau$$

zu setzen und können dann unser Integral ohne weiteres in der Form

$$\int W\left(I, J_1, J_2, \frac{dJ_1}{dI}, \frac{dJ_2}{dI} \cdots\right) \cdot J_1 ds$$

oder auch

$$\int W\left(I, J_1, J_2, \frac{dJ_1}{dI}, \frac{dJ_2}{dI} \cdots\right) dI$$

schreiben, die mit der in Theorem III gefundenen übereinstimmt. —

Dies indessen nur nebenbei. Fassen wir jetzt die vorhin betrachteten unendlichen Gruppen in's Auge, so können wir nunmehr ohne weiteres die allgemeine Form der bei ihnen invarianten Kurvenintegrale hinschreiben.

Bei der ersten derselben, der unendlichen Gruppe

$$\zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

fanden wir die beiden von einander unabhängigen Differentialinvarianten $x$ und $y$ und hiernach als allgemeine Form einer Differentialinvariante die folgende

$$\Omega(x, y, y', y'' \ldots y^{(m)}).$$

Es ergiebt sich daher, *dafs unsere Gruppe auch unendlich viele Integralinvarianten von Kurven besitzt, und zwar genügen sie alle der allgemeinen Formel*

$$\int \Omega(x, y, y', y'' \ldots y^{(m)})\, dx.$$

*Hierbei entspricht einer Differentialinvariante $m^{ter}$ Ordnung eine Integralinvariante derselben Ordnung.*

Betrachten wir dagegen die unter (2) behandelte Gruppe gegeben durch das Symbol

$$\eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Hier hatten wir nur eine einzige Differentialinvariante der gesuchten Art gefunden, nämlich $x$. Wir erhalten also das Resultat: *Die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen der Form $x_1 = x$, $y_1 = \varphi(x, y, z)$, $z_1 = \chi(x, y, z)$ besitzt unendlich viele Integralinvarianten von Kurven. Sie alle sind gegeben durch die Formel*

$$\int \Omega(x)\, dx$$

*und daher sämtlich von nullter Ordnung.*

Man sieht leicht, dafs wir unsere letzte Gruppe in gewissem Sinne als eine Untergruppe der unendlichen Gruppe von Punkttransformationen auffassen können, die durch die infinitesimalen Transformationen

$$c\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4}$$

dargestellt werden. Die letztere Gruppe aber können wir geradezu als die unendliche Gruppe des Satzes 2 des ersten Abschnittes bezeichnen. Sie besitzt überhaupt keine Differentialinvarianten von Kurven. Dagegen läfst sie das Integral

$$\int dx$$

invariant. Somit folgt: *Die unendliche Gruppe aller Transformationen*

$$c\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

*besitzt keine Differentialinvarianten von Kurven und nur eine einzige Integralinvariante dieser Art, nämlich das Integral*

$$\int dx.$$

Für die dritte der oben betrachteten unendlichen Gruppen gilt dann ohne weiteres: *Bei der unendlichen Gruppe aller volumentreuen Transformationen in den Veränderlichen $x, y, z$ haben die Kurven des Raumes weder Differential- noch Integralinvarianten.*

Es hat sich somit ergeben, dafs bei einer unendlichen Gruppe entweder keine oder unendlich viele, oder eine diskrete Anzahl von Kurvenintegralinvarianten vorhanden sind. Was den letzteren Fall anlangt, so erkennt man, dafs dieser sich stets darauf reduziert, dafs ein und nur ein Kurvenintegral bei der betreffenden Gruppe invariant bleibt. Denn gesetzt, es blieben mehrere solche Integrale, etwa zwei, bei unserer Gruppe invariant, so würde die Division der unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke nach Theorem II sofort eine Differentialinvariante unserer Gruppe ergeben. Dann hätte diese aber nach Theorem III unendlich viele Integralinvarianten von Kurven, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Wir fassen daher unsere Ergebnisse zusammen in

**Satz 2.** *Eine unendliche Gruppe von Transformationen in den Veränderlichen $x, y, z$ besitzt entweder keine oder eine oder unendlich viele Integralinvarianten von Kurven. Im letzteren Fall besitzt sie mindestens eine Differentialinvariante von Kurven.*

Hiernach können wir das folgende Theorem aussprechen, das sämtliche überhaupt mögliche Fälle erledigt.

**Theorem IV.** *Liegt eine kontinuierliche Gruppe des Raumes $x, y, z$ vor, deren Transformationen auf die Kurven dieses Raumes angewandt werden, und ist die Aufgabe gestellt, alle zugehörigen invarianten Integrale ihrer Zahl und Form nach zu finden, so sind im ganzen vier Fälle zu unterscheiden:*

*Besitzt die Gruppe mehr als eine Differentialinvariante, d. h. in unserem Falle unendlich viele, so können, greifen wir unter diesen die $s+1$ ersten*

$$I, J_1, J_2 \dots J_s$$

*heraus, die ein volles System bilden, sämtliche Integralinvarianten der Gruppe auf die Form*

$$\int W\left(I, J_1, J_2 \cdots J_s, \frac{dJ_1}{dI} \cdots\right) dI$$

*gebracht werden.*

*Besitzt die vorgelegte Gruppe nur eine Differentialinvariante*

$$I(x, y, z, y', z', y'', z'' \dots y^{(m)}, z^{(m)}),$$

*so giebt die Formel*

$$\int W(I) dI$$

*alle bei ihr invarianten Integrale. — In diesen beiden ersten Fällen sind unendlich viele Integralinvarianten vorhanden; im letzteren Fall sind diese sämtlich von $m^{ter}$ Ordnung.*

*Besitzt andererseits die vorgelegte Gruppe keine Differentialinvarianten, so kann sie dennoch eine, dann aber auch nur eine Integralinvariante*

$$\mathfrak{J} = \int \varphi(x, y, z, y', z' \dots) dx$$

*haben, die wir auch in der Form*

$$\int d\mathfrak{J}$$

*schreiben können.*

*Endlich ist es möglich, daſs die vorgelegte Gruppe weder Differentialinvarianten noch Integralinvarianten besitzt. —*

*Die letzten drei Fälle kommen nur bei unendlichen Gruppen vor.*

# III.

## Aufstellung aller Integralinvarianten der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

Nach unserem Theorem III macht es nunmehr keine Schwierigkeiten, die Integralinvarianten aufzustellen für Gruppen, deren Differentialinvarianten bekannt sind. Dies ist der Fall für sämtliche endliche kontinuierliche Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, für die natürlich gleichfalls unsere Betrachtungen gelten. Für diese hat S. Lie in einer im Jahre 1883 im Norwegischen Archiv erschienenen und später in den Mathematischen Annalen Bd. 32, p. 213ff. abgedruckten Arbeit*) alle Differentialinvarianten bestimmt. Diese Abhandlung liegt auch den folgenden Erörterungen zu grunde; im wesentlichen ist hier nur die Reihenfolge der betrachteten Gruppen geändert. Man wird an unseren Ergebnissen den Zusammenhang invarianter Integrale mit invarianten Differentialgleichungen erkennen.

### a. Gruppen, die unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung invariant lassen.

1. $p$.

Die Differentialinvarianten sind $y, y', y'', \ldots y^{(m)} \ldots$ und das allgemeine invariante Integral $m^{\text{ter}}$ Ordnung hat daher die Form

$$J = \int W(y, y', y'', \ldots y^{(m)})\, dx;$$

die niedrigste Integralinvariante ist

$$I = \int dx.$$

2. $p, q$.

Die Differentialinvarianten sind $y', y'' \ldots y^{(m)} \ldots$. Es wird daher

$$J = \int W(y', y'' \ldots y^{(m)})\, dx,$$

$$I = \int dx.$$

*) „Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x, y$, die eine Gruppe von Transformationen gestatten“.

3. $q, xp + yq$.
Die Differentialinvarianten*) sind

$$u = y', \quad v = xy'', \quad \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2} \cdots \frac{d^m v}{du^m} \cdots.$$

Somit hat man

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-2} v}{du^{m-2}}\right) du$$

oder

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-2} v}{du^{m-2}}\right) \frac{v}{x} dx,$$

und die niedrigste Integralinvariante ist daher

$$I = \int \frac{dx}{x}.$$

4. $q, p, xp + yq$.
Hier ist

$$u = y', \quad v = \frac{y'''}{y''^2} \cdots,$$

also

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3} v}{du^{m-3}}\right) y'' dx,$$

$$I = \int y'' dx.$$

b. Gruppen, die zwei und nur zwei Differentialgleichungen erster Ordnung invariant lassen.

5. $q, yq$.
Die Differentialinvarianten sind

$$u = x, \quad v = \frac{y''}{y'}, \quad \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \cdots \frac{d^m v}{dx^m} \cdots.$$

Es wird also

$$J = \int W\left(x, v, \frac{dv}{dx}, \cdots \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

6. $p, q, yq$.
Hier ist

$$u = \frac{y''}{y'}, \quad v = \frac{y'''}{y'},$$

---

*) Hier hat Lie in der genannten Arbeit die niedrigste Invariante $y'$ nicht mit angegeben.

daher

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right) dx,$$

nach Satz 2 des ersten Abschnittes, und

$$I = \int dx.$$

7. $p, q, xp + cyq;\ c \neq 0,\ c \neq 1.$
Man hat

$$u = \frac{y''}{y'^{\frac{c-2}{c-1}}}, \qquad v = \frac{y'''}{y'^{\frac{c-3}{c-1}}},$$

somit

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right) du$$

oder

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right)\left(v - \frac{c-2}{c-1}u^2\right)\frac{1}{y'^{\frac{1}{c-1}}}\, dx,$$

und mithin

$$I = \int \frac{dx}{y'^{\frac{1}{c-1}}}.$$

8. $p, q, yq, xp.$
Hier ist

$$u = \frac{y'y'''}{y''^2}, \quad v = \frac{y'^2 y^{IV}}{y''^3};$$

daher

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-4}v}{du^{m-4}}\right) du,$$

oder, nach Berechnung des Differentiales $du$,

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-4}v}{du^{m-4}}\right)(u + v - 2u^2)\,\frac{y''}{y'}\, dx.$$

Daher wird

$$I = \int \frac{y''}{y'}\, dx.$$

9. $p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q.$
Hier ist

$$u = (x-y)y''y'^{-\frac{3}{2}} + 2\left(y'^{\frac{1}{2}} + y'^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$v = (x-y)^2 y''' y'^{-2} + 6u\left(y'^{\frac{1}{2}} + y'^{-\frac{1}{2}}\right) - 6(y' + y'^{-1}).$$

Es ist also

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right) du.$$

Die Ausrechnung ergiebt

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right)\left(v - \frac{3}{2}u^2 + 12\right)\frac{y'^{\frac{1}{2}}}{x-y}\, dx.$$

Hiernach ist

$$I = \int \frac{\sqrt{y'}}{x-y}\, dx.$$

10. $q, yq, y^2q.$

Die Differentialinvarianten sind gegeben durch

$$u = x, \quad w = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^2}, \frac{dw}{dx} \cdots.$$

Also wird

$$J = \int W\left(x, w, \frac{dw}{dx}, \cdots \frac{d^{m-3}w}{dx^{m-3}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

11. $q, yq, y^2q, p.$

Die Differentialinvarianten sind

$$w = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^2}, \quad w' = \frac{dw}{dx}, \quad w'', \cdots.$$

Es ist daher

$$J = \int W(w, w', w'', \ldots w^{(m-3)})\, dw,$$

also

$$J = \int W(w, w', w'', \ldots w^{(m-3)})\, w'\, dx,$$

$$I = \int dx.$$

12. $q, yq, y^2q, p, xp.$

Hier ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen des letzten Falles

$$u = \frac{w'}{w^{\frac{3}{2}}}, \quad v = \frac{w''}{w^2},$$

mithin

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-5}v}{du^{m-5}}\right) du$$

oder

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-5} v}{du^{m-5}}\right)\left(v - \frac{3}{2} u^2\right) w^{\frac{1}{2}} dx$$

und daher

$$I = \int \sqrt{\frac{2y'y''' - 3y''^2}{y'^2}} dx.$$

13. $q, yq, y^2q, p, xp, x^2p.$

Die Differentialinvarianten drücken sich durch diejenigen der vorigen Gruppe aus in der Form

$$u = \frac{4ww'' - 5w'^2}{w^3}, \quad v = \frac{4w^2w''' - 18ww'w'' + 15w'^3}{w^{\frac{9}{2}}}.$$

Man hat dann

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-6} v}{du^{m-6}}\right) du,$$

oder nach Berechnung des Differentiales

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-6} v}{du^{m-6}}\right) v \cdot w^{\frac{1}{2}} dx.$$

Die niedrigste Integralinvariante ist also

$$I = \int \sqrt{\frac{2y'y''' - 3y''^2}{y'^2}} dx,$$

also dieselbe, wie bei der vorigen Gruppe.

c. Gruppen, die eine und nur eine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen.

14. $p, xp + yq, x^2p + 2xyq.$

Die Differentialinvarianten sind

$$u = 2yy'' - y'^2, \quad v = y^2y''', \quad \frac{dv}{du}, \cdots$$

Es wird daher

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3} v}{du^{m-3}}\right) du$$

oder

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3} v}{du^{m-3}}\right) \cdot 2v \frac{1}{y} dx,$$

$$I = \int \frac{dx}{y}.$$

Der gewöhnlich an Stelle unseres Typus geschriebene Typ $p$, $2xp + yq$, $x^2p + xyq$, den wir hinzufügen wollen, entsteht aus dem ersteren einfach durch die Transformation

$$x_1 = x, \quad y_1 = \sqrt{y}.$$

Seine Differentialinvarianten werden daher

$$u = y^3 y'', \quad v = 3y^4 y' y'' + y^5 y''', \quad \frac{dv}{du}, \cdots$$

und es wird

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3} v}{d u^{m-3}}\right) du,$$

nach Ausrechnung

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-3} v}{d u^{m-3}}\right) v \cdot \frac{1}{y^2}\, dx,$$

daher

$$I = \int \frac{dx}{y^2}.$$

15. $yq$, $p$, $xp$, $x^2p + xyq$.

Hier ist

$$u = y^{\frac{1}{2}} y''^{-\frac{3}{2}} y''' + 3 y^{-\frac{1}{2}} y' y''^{-\frac{1}{2}},$$

$$v = 3yy''^{-2} y^{IV} - 4yy''^{-3} y'''^2,$$

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-4} v}{d u^{m-4}}\right) du,$$

oder ausgerechnet

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-4} v}{d u^{m-4}}\right) \frac{2v - u^2 + 18}{6}\, y''^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$I = \int \sqrt{\frac{y''}{y}}\, dx.$$

16. $X_1 q$, $X_2 q, \ldots X_r q$.

Hier findet Lie

$$u = x, \quad v = D = \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \ldots & X_1^{(r)} \\ X_2 & X_2' & \ldots & X_2^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r & X_r' & \ldots & X_r^{(r)} \\ y & y' & \ldots & y^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Es ergiebt sich somit

$$J = \int W\left(x, D, \frac{dD}{dx}, \dots \frac{d^{m-r} D}{dx^{m-r}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

17. $X_1 q, X_2 q, \dots X_r q, yq.$

Hier hat man mit Beibehaltung der Bezeichnungsweise der vorigen Nummer

$$u = x, \quad v = \frac{d \log D}{dx},$$

$$J = \int W\left(x, \frac{d \log D}{dx}, \dots \frac{d^{m-r} \log D}{dx^{m-r}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

18. $X_1 q, X_2 q, \dots X_r q, p.$

Die Differentialinvarianten sind

$$\varphi = cy + c_1 y' + c_2 y'' + \cdots + c_r y^{(r)}, \frac{d\varphi}{dx}, \dots,$$

wo die Gröfsen $c, c_1, \dots c_r$ Konstante bedeuten. Daher ist

$$J = \int W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \dots \frac{d^{m-r} \varphi}{dx^{m-r}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

19. $X_1 q, X_2 q, \dots X_r q, yq, p.$

Ist $\varphi$ derselbe Ausdruck, wie oben, so ist hier

$$u = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi}, \quad v = \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{\varphi},$$

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \dots \frac{d^{m-r-2} v}{du^{m-r-2}}\right) dx,$$

$$I = \int dx.$$

20. $q, xq, \dots x^{r-1} q, p, xp + cyq; \; c \neq r.$

Man hat

$$u = \frac{y^{(r+1)}}{y^{(r)\frac{c-r-1}{c-r}}}, \quad v = \frac{y^{(r+2)}}{y^{(r)\frac{c-r-2}{c-r}}},$$

daher

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right) du,$$

oder nach Ausrechnung des Differentiales,

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right)\left(v - \frac{c-r-1}{c-r}\, u^2\right) \frac{1}{y^{(r)\frac{1}{c-r}}}\, dx.$$

Also erhält man

$$I = \int \frac{dx}{y^{(r)\frac{1}{c-r}}}.$$

21. $q, xq, \ldots x^{r-1}q, p, xp + ryq;\ (r > 1)$.
Hier ist

$$u = y^{(r)}, \qquad v = \frac{y^{(r+2)}}{y^{(r+1)^2}},$$

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right) du,$$

also

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right) y^{(r+1)}\, dx,$$

$$I = \int y^{(r+1)}\, dx.$$

22. $q, xq, \ldots x^{r-1}q, p, xp + (ry + x^r)q$.
Die Differentialinvarianten sind

$$u = y^{(r+1)} e^{k\, y^{(r)}}, \quad v = y^{(r+2)} e^{2\, k\, y^{(r)}}, \quad \frac{dv}{du}, \cdots;$$

wo

$$\frac{1}{k} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1) r$$

ist. Es wird also

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right) du$$

oder

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-2}\, v}{d\, u^{m-r-2}}\right) (v + k u^2) \frac{1}{e^{k\, y^{(r)}}}\, dx,$$

daher

$$I = \int \frac{dx}{e^{k\, y^{(r)}}}.$$

23. $q,\ xq, \ldots x^{r-1}q,\ yq,\ p,\ xp;\ (r>1)$.
Es ist

$$u = \frac{y^{(r)}\,y^{(r+2)}}{y^{(r+1)^2}}, \quad v = \frac{y^{(r)^2}\,y^{(r+3)}}{y^{(r+1)^3}}.$$

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-3}\,v}{d\,u^{m-r-3}}\right) du,$$

nach Ausrechnung

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-3}\,v}{d\,u^{m-r-3}}\right)(u + v - 2u^2)\frac{y^{(r+1)}}{y^{(r)}}\,dx,$$

$$I = \int \frac{y^{(r+1)}}{y^{(r)}}\,dx.$$

24. $q,\ xq, \ldots x^{r-1}q,\ p,\ 2xp + (r-1)yq,\ x^2p + (r-1)xyq;$ $(r>1)$.

Die Differentialinvarianten sind

$$u = y^{(r)^{-\frac{2(r+3)}{r+1}}}\cdot u_0, \quad v = y^{(r)^{-\frac{3(r+3)}{r+1}}}\cdot u_1, \quad \frac{dv}{du}, \cdots,$$

wenn wir

$$u_0 = (r+1)y^{(r)}y^{(r+2)} - (r+2)y^{(r+1)^2},$$

$$u_1 = (r+1)^2 y^{(r)^2} y^{(r+3)} - 3(r+3)\left[u_0 y^{(r+1)} + (r+2)\frac{y^{(r+1)^3}}{3}\right]$$

oder

$$u_1 = (r+1)^2 y^{(r)^2} y^{(r+3)} - 3(r+1)(r+3)y^{(r)}y^{(r+1)}y^{(r+2)} + 2(r+2)(r+3)y^{(r+1)^3}$$

setzen. Es folgt demnach

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-3}\,v}{d\,u^{m-r-3}}\right) du$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-3}\,v}{d\,u^{m-r-3}}\right)\frac{v}{r+1}\,y^{(r)^{\frac{2}{r+1}}}\,dx,$$

$$I = \int y^{(r)^{\frac{2}{r+1}}}\,dx.$$

25. $q,\ xq, \ldots x^{r-1}q,\ p,\ xp,\ yq,\ x^2p + (r-1)xyq;\ (r>1)$.
Hier hat Lie die Differentialinvarianten gefunden

$$u = u_0^{-\frac{3}{2}} u_1, \quad v = u_0^{-2} u_2, \quad \frac{dv}{du} \cdots,$$

wo $u_0$ und $u_1$ dieselben Werte wie in der vorigen Nummer haben. Den Ausdruck $u_2$ hat Lie an genannter Stelle nicht berechnet. Da wir ihn brauchen, so sei dies hier kurz ausgeführt. Er ergiebt sich aus der linearen partiellen Differentialgleichung*) in den Veränderlichen $y^{(r)}$, $y^{(r+1)}$, $y^{(r+2)}$, $y^{(r+3)}$, $y^{(r+4)}$

$$(r+1) y^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r+1)}} + 2(r+2) y^{(r+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r+2)}} + 3(r+3) y^{(r+2)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r+3)}} + 4(r+4) y^{(r+3)} \frac{\partial f}{d y^{(r+4)}} = 0,$$

deren erste drei Lösungen Lie als $y^{(r)}$, $u_0$, $u_1$ bestimmt hat. Man findet die vierte Lösung

$$u_2 = (r+1)^3 y^{(r)^3} y^{(r+4)} - 4(r+4)\left[u_1 y^{(r+1)} + 3(r+3)\left(u_0 \frac{y^{(r+1)^2}}{2} + (r+2)\frac{y^{(r+1)^4}}{12}\right)\right]$$

oder

$$u_2 = (r+1)^3 y^{(r)^3} y^{(r+4)} - 4(r+1)^2 (r+4) y^{(r)^2} y^{(r+1)} y^{(r+3)} + 6(r+1)(r+3)(r+4) y^{(r)} y^{(r+1)^2} y^{(r+2)} - 3(r+2)(r+3)(r+4) y^{(r+1)^4}.$$

Hiernach wird

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-4} v}{d u^{m-r-4}}\right) du.$$

Dazu hat man

$$du = -\frac{3}{2} u_0^{-\frac{5}{2}} u_1 \, du_0 + u_0^{-\frac{3}{2}} du_1.$$

Führen wir hierin die Differentiationen aus, so ergiebt eine längere Umformung schliefslich

$$du = \frac{u_0^{\frac{1}{2}}}{2(r+1) y^{(r)}} \{2v - 3u^2 - 6(r+3)\} \, dx.$$

Das allgemeine invariante Integral $m^{\text{ter}}$ Ordnung kann daher auch geschrieben werden

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-r-4} v}{d u^{m-r-4}}\right) \{2v - 3u^2 - 6(r+3)\} \frac{u_0^{\frac{1}{2}}}{y^{(r)}} \, dx,$$

*) Vgl. hierzu im besonderen Mathem. Annalen Bd. 32. S 244f.

und die niedrigste Integralinvariante ist von $(r+2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$I = \int \frac{\sqrt{(r+1)\, y^{(r)} y^{(r+2)} - (r+2)\, y^{(r+1)^2}}}{y^{(r)}}\, dx .$$

### d. Gruppen, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen.

26. $p, q, xq, xp - yq, yp.$

Hier haben wir

$$u = y''^{-\frac{8}{3}} \varrho_2, \quad v = y''^{-4} \varrho_3,$$

wobei

$$\varrho_2 = 3y'' y^{IV} - 5y'''^2, \quad \varrho_3 = 3y''^2 y^V - 15y'' y''' y^{IV} + \frac{40}{3} y'''^3$$

gesetzt ist. Man erhält

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-5} v}{d u^{m-5}}\right) du.$$

Die Ausrechnung ergiebt

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-5} v}{d u^{m-5}}\right) \cdot v y''^{\frac{1}{3}} dx .$$

Es ist also

$$I = \int \sqrt[3]{y''}\, dx .$$

27. $p, q, xq, yq, xp, yp.$

Die Differentialinvarianten sind

$$u = \varrho_2^{-\frac{3}{2}} \varrho_3, \quad v = \varrho_2^{-2} \varrho_4, \quad \frac{dv}{du}, \cdots,$$

wobei $\varrho_2$ und $\varrho_3$ dieselben Werte wie in der vorigen Nummer haben und

$$\varrho_4 = 3y''^3 y^{VI} - 21 y''^2 y''' y^V + 35 y'' y'''^2 y^{IV} - \frac{35}{3} y'''^4$$

gesetzt ist. Es wird sonach

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-6} v}{d u^{m-6}}\right) du .$$

Nun ist

$$du = -\frac{3}{2} \varrho_2^{-\frac{5}{2}} \varrho_3 d\varrho_2 + \varrho_2^{-\frac{3}{2}} d\varrho_3,$$

oder ausgerechnet

$$du = \frac{\varrho_2^{\frac{1}{2}}}{2y''}\left\{2v - 3u^2 - \frac{10}{3}\right\} dx.$$

Man hat also

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-6}v}{du^{m-6}}\right)\left(2v - 3u^2 - \frac{10}{3}\right)\frac{\varrho_2^{\frac{1}{2}}}{y''}\,dx$$

und

$$I = \int \frac{\sqrt{3y''y^{IV} - 5y'''^2}}{y''}\,dx.$$

28. $p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q.$
Die Differentialinvarianten sind gegeben durch

$$u = \sigma\varrho_3^{-\frac{8}{3}}, \quad v = \sigma_1\varrho_3^{-3}, \quad \frac{dv}{du}, \cdots.$$

Hierbei ist*)

$$\sigma = 2\varrho_3\varrho_5 - 35\varrho_2\varrho_3^2 - 7\left(\varrho_4 - \frac{5}{3}\varrho_2^2\right)^2,$$

$$\sigma_1 = \varrho_3\left(\varrho_6 - 84\varrho_2\varrho_4 + \frac{245}{3}\varrho_2^3\right) - 12\left(\varrho_5 - \frac{35}{2}\varrho_2\varrho_3\right)\left(\varrho_4 - \frac{5}{3}\varrho_2^2\right) + \frac{28}{\varrho_3}\left(\varrho_4 - \frac{5}{3}\varrho_2^2\right)^3,$$

$$\varrho_2 = 3y''y^{IV} - 4y'''^2,$$

$$\varrho_3 = 3y''^2y^{V} - 5y'''\varrho_2 - \frac{20}{3}y'''^3,$$

$$\varrho_4 = 3y''^3y^{VI} - 8y'''\varrho_3 - 20y'''^2\varrho_2 - \frac{40}{3}y'''^4,$$

$$\varrho_5 = 9y''^4y^{VII} - 35y'''\varrho_4 - 140y'''^2\varrho_3 - \frac{700}{3}y'''^3\varrho_2 - \frac{280}{3}y'''^5,$$

$$\varrho_6 = 27y''^5y^{VIII} - 48y'''\varrho_5 - 24.35y'''^2\varrho_4 - 16.140y'''^3\varrho_3 - 2800y'''^4\varrho_2 - \frac{8.280}{3}y'''^6.$$

Es wird nun

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-8}v}{du^{m-8}}\right) du.$$

*) Hier befindet sich ein Druckfehler im Abdruck der Lieschen Arbeit, Math. Annalen Bd. 32, S. 228; in dem Ausdrucke für $\sigma_1$ steht nämlich $84\varrho_3\varrho_4$ statt $84\varrho_2\varrho_4$.

Dazu ergiebt sich

$$du = -\frac{8}{3}\,\sigma\varrho_3^{-\frac{11}{3}}\,d\varrho_3 + \varrho_3^{-\frac{8}{3}}\,d\sigma,$$

und hierin ist wieder

$$d\sigma = 2\varrho_5 d\varrho_3 + 2\varrho_3 d\varrho_5 - 35\varrho_3^2 d\varrho_2 - 70\varrho_2\varrho_3 d\varrho_3$$
$$-14\left(\varrho_4 - \frac{5}{3}\varrho_2^2\right)\left(d\varrho_4 - \frac{10}{3}\varrho_2 d\varrho_2\right).$$

Mit Einsetzung dieses Ausdruckes erhalten wir unter Berücksichtigung der von Lie gefundenen Werte

$$d\varrho_2 = \frac{\varrho_3 + \frac{10}{3}y'''\varrho_2}{y''}\,dx,$$

$$d\varrho_3 = \frac{\varrho_4 + 5y'''\varrho_3 - \frac{5}{3}\varrho_2^2}{y''}\,dx,$$

$$d\varrho_4 = \frac{\varrho_5 + 20y'''\varrho_4 - 8\varrho_2\varrho_3}{3y''}\,dx,$$

$$d\varrho_5 = \frac{\varrho_6 + 25y'''\varrho_5 - 35\varrho_2\varrho_4}{3y''}\,dx$$

für unser Differential den Ausdruck

$$du = \frac{\varrho_3^{\frac{1}{3}}}{3y''}\{2v - 105\}\,dx,$$

für das allgemeine invariante Integral daher auch die Form

$$J = \int W\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots \frac{d^{m-8}v}{du^{m-8}}\right)\{2v - 105\}\,\frac{\varrho_3^{\frac{1}{3}}}{y''}\,dx,$$

und die niedrigste Integralinvariante ist daher

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{9y''^2y^V - 15y'''\varrho_2 - 20y'''^3}}{y''}\,dx$$

oder, mit Einsetzung des Wertes von $\varrho_2$,

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{9y''^2y^V - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^2}}{y''}\,dx.$$

Der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes giebt gleich Null gesetzt bekanntlich die bei unserer Gruppe invariante Gleichung der Kegelschnitte, der Nenner gleich Null gesetzt die ebenfalls invariante Differentialgleichung der Geraden.

Hiermit ist die Aufstellung aller invarianten Integrale der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene erledigt.

---

## IV.

### Neue Betrachtungen, ausgehend von einer Parameterdarstellung der Kurven des Raumes.

Obschon im Vorangehenden die allgemeine Theorie der Invarianz von Kurvenintegralen bei infinitesimalen Transformationen im Wesentlichen erledigt wurde, erscheint es doch am Platze, auch einmal die Verhältnisse zu betrachten, wie sie sich bei einer Parameterdarstellung der Kurven ergeben. Einmal wird sich zeigen, dafs hierdurch verschiedene Vereinfachungen in der Form und Berechnung der Erweiterung der vorgelegten Gruppe auftreten, so dafs auch die Differentialgleichungen, welche die Invarianten bestimmen, eine übersichtlichere Form annehmen; andererseits gestaltet sich die Untersuchung interessant insofern, als in diesem Falle neben die gegebene Gruppe noch eine gewisse unendliche Gruppe tritt, die bestimmend auf die Lösung des Problemes einwirkt, so dafs wir faktisch eine doppelte Aufgabe zu erfüllen haben werden. Schliefslich werden wir auch auf diesem Wege zu unseren früheren Ergebnissen gelangen, um darauf im nächsten Abschnitt die hier angestellten Betrachtungen auf ein gröfseres Beispiel anzuwenden.

Wir denken uns*) die Koordinaten der Punkte einer Raumkurve als Funktionen eines Parameters $t$ gegeben in der Form

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t),$$

wobei dieser Parameter bei den Transformationen der vorgelegten Gruppe

$$(1) \qquad Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

invariant bleibt. Setzen wir dann

---

*) Vgl. die ähnliche Behandlung invarianter Flächenintegrale, Lie, Leipz. Ber. 1897, S. 379 ff.

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', \quad \dfrac{dz}{dt} = z', \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = x'', & \dfrac{d^2y}{dt^2} = y'', \quad \dfrac{d^2z}{dt^2} = z'', \cdots, \end{cases}$$

so läſst sich jede Funktion der bisher betrachteten Gröſsen

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^mz}{dx^m}$$

als eine solche von

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ x'', \ldots z^{(m)}$$

ausdrücken. So folgt z. B. aus den Gleichungen

$$dy = y'\,dt = \frac{dy}{dx}\,x'\,dt, \quad dz = z'\,dt = \frac{dz}{dx}\,x'\,dt$$

sogleich

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'};$$

sodann aus

$$d^2y = y''\,dt^2 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\,x'^2 + \frac{dy}{dx}\,x''\right) dt^2$$

mit Berücksichtigung von (3)

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}$$

u. s. w. Das allgemeine invariante Kurvenintegral

$$(5)\qquad \int \varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^mz}{dx^m}\right) dx$$

wird also die Form annehmen

$$(6)\qquad \int \Omega(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z', \ldots z^{(m)})\,dt.$$

Soll umgekehrt ein vorgelegtes Integral der Form (6) bei der Gruppe $Xf$ invariant bleiben, so müssen wir zuerst verlangen, daſs es sich auch in der Form (5) darstellen lasse. Dies ist nun im allgemeinen nicht immer möglich, da die Gröſsen $x', y', z', x'' \ldots z^{(m)}$ durch die Relationen (2) keineswegs immer als Funktionen von $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^mz}{dx^m}$ bestimmt sind. Soll dies indessen der Fall sein, so muss unser Integral (6) von der zufälligen Wahl des Parameters $t$ unabhängig sein,

eine Forderung, die sich gruppentheoretisch darin ausdrückt, dafs die Gröfse

$$\int \Omega(x, y, z, x', y', z', \dots z^{(m)})\, dt$$

eine Integralinvariante der unendlichen Gruppe aller Transformationen von $t$

$$Uf = \alpha(t) \frac{\partial f}{\partial t} \tag{7}$$

sei, deren Transformationen in allgemeinster Weise den Übergang von einem Parameter $t$ zu einem anderen definieren.

Gesetzt nun, es liegt eine kontinuierliche Gruppe $Xf$ (1) vor, und wir sollten deren Integralinvarianten

$$\int \Omega(x, y, z, x', y', z', x'', \dots z^{(m)})\, dt$$

finden. Wir hätten dann zur Bestimmung von $\Omega$ zunächst die Gleichung

$$X^{(m)}(\Omega\, dt) = 0$$

oder

$$X^{(m)}(\Omega)\, dt + \Omega \,.\, X^{(m)}(dt) = 0.$$

Die letzte Gleichung wird aber, da nach Voraussetzung

$$X(dt) = d\, X(t) = 0$$

ist, einfach

$$X^{(m)}(\Omega) = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung besagt, dafs die gesuchten Funktionen $\Omega$ Differentialinvarianten unserer Gruppe $Xf$ sein müssen. Um sie zu finden, haben wir nur das Symbol (1) noch für die Argumente von $\Omega$ zu erweitern und den so erhaltenen Ausdruck gleich Null zu setzen. Die Lösungen der sich so ergebenden linearen partiellen Differentialgleichung sind die gesuchten Invarianten.

Die Erweiterung der vorgelegten Gruppe $Xf$ gestaltet sich nun hier sehr einfach. Denn durch Variation der Gleichungen

$$dx^{(\nu-1)} - x^{(\nu)}\, dt = 0, \quad dy^{(\nu-1)} - y^{(\nu)} dt = 0, \quad dz^{(\nu-1)} - z^{(\nu)}\, dt = 0$$

folgt, wenn man berücksichtigt, dafs $t$ von $Xf$ nicht transformiert wird, allgemein für die Inkremente der $\nu^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $x, y, z$ nach $t$

$$\delta x^{(\nu)} = \frac{d\,\xi^{(\nu-1)}}{dt} = \xi^{(\nu)}, \quad \delta y^{(\nu)} = \frac{d\eta^{(\nu-1)}}{dt} = \eta^{(\nu)}, \quad \delta z^{(\nu)} = \frac{d\zeta^{(\nu-1)}}{dt} = \zeta^{(\nu)}, \tag{9}$$

wobei $\xi^{(\nu)}, \eta^{(\nu)}, \zeta^{(\nu)}$ die vollständigen $\nu^{\text{ten}}$ Ableitungen von $\xi, \eta, \zeta$ respektive nach $t$ bezeichnen.

Die erste Bedingungsgleichung, der die gesuchten Funktionen

$$f = \Omega(x, y, z, x', y', z', \ldots z^{(m)})$$

zu genügen haben, nimmt hiernach ausführlich geschrieben die Form an

$$X^{(m)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \xi' \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial f}{\partial z'} + \xi'' \frac{\partial f}{\partial x''} + \cdots + \zeta^{(m)} \frac{\partial f}{\partial z^{(m)}} = 0. \tag{10}$$

Weiter mufs aber der Ausdruck

$$\int \Omega(x, y, z, x', \ldots z^{(m)})\, dt,$$

wie wir oben fanden, zugleich eine Integralinvariante der unendlichen Gruppe (7)

$$Uf = \alpha(t) \frac{\partial f}{\partial t}$$

sein, wo $\alpha$ eine willkürliche Funktion von $t$ ist. Diese Forderung findet ihren Ausdruck in dem Bestehen der Gleichung

$$U^{(m)}(\Omega\, dt) = 0$$

oder

$$U^{(m)}(\Omega) + \Omega \alpha' = 0, \tag{11}$$

wenn wir

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$$

setzen.

Auch hier müssen wir, um unsere Bedingungsgleichung ausführlich schreiben zu können, die Transformation $Uf$ zunächst erweitern. Nur haben wir hier zu bedenken, dafs zwar $t$, aber nicht $x, y, z$ transformiert werden. Berücksichtigt man diesen Umstand, so folgt durch Variation der Gleichungen

$$dx - x'dt = 0, \quad dy - y'dt = 0, \quad dz - z'dt = 0$$

zunächst für die Inkremente der ersten Differentialquotienten von $x', y', z'$ nach $t$

$$\delta x' = - x'\alpha', \quad \delta y' = - y'\alpha', \quad \delta z' = - z'\alpha'.$$

In analoger Weise erhält man die Inkremente der zweiten Differentialquotienten durch Variation der Gleichungen

$$dx' - x''dt = 0, \quad dy' - y''dt = 0, \quad dz' - z''dt = 0.$$

Es ergiebt sich

$$\delta x'' = -(2x''\alpha' + x'\alpha''), \quad \delta y'' = -(2y''\alpha' + y'\alpha''),$$
$$\delta z'' = -(2z''\alpha' + z'\alpha'').$$

Allgemein gelten die Formeln

$$(12) \quad \delta x^{(\nu)} = \frac{d\delta x^{(\nu-1)}}{dt} - x^{(\nu)}\alpha', \qquad \delta y^{(\nu)} = \frac{d\delta y^{(\nu-1)}}{dt} - y^{(\nu)}\alpha',$$
$$\delta z^{(\nu)} = \frac{d\delta z^{(\nu-1)}}{dt} - z^{(\nu)}\alpha'.$$

Somit wird die zweite Bedingungsgleichung die folgende

$$(13) \quad \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial t} - x'\alpha'\frac{\partial\Omega}{\partial x'} - y'\alpha'\frac{\partial\Omega}{\partial y'} - z'\alpha'\frac{\partial f}{\partial z'} - (2x''\alpha' + x'\alpha'')\frac{\partial\Omega}{\partial x''}$$
$$- (2y''\alpha' + y'\alpha'')\frac{\partial\Omega}{\partial y''} - (2z''\alpha' + z'\alpha'')\frac{\partial\Omega}{\partial z''}\cdots = -\Omega\alpha'.$$

Diese Gleichung zerfällt aber wegen des Auftretens der willkürlichen Funktion $\alpha$ in $m+1$ Relationen, die wir erhalten, indem wir die Koeffizienten von $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(m)}$ der Reihe nach gleich Null setzen. So ergiebt sich zunächst die nach Voraussetzung selbstverständliche Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

weiter aber das Gleichungssystem

$$(14) \begin{cases} x'\dfrac{\partial f}{\partial x'} + y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} + z'\dfrac{\partial f}{\partial z'} + 2x''\dfrac{\partial f}{\partial x''} + 2y''\dfrac{\partial f}{\partial y''} + \cdots \\ \qquad \cdots + 3x'''\dfrac{\partial f}{\partial x'''} + \cdots + \Omega\dfrac{\partial f}{\partial \Omega} = 0, \\ x'\dfrac{\partial f}{\partial x''} + y'\dfrac{\partial f}{\partial y''} + z'\dfrac{\partial f}{\partial z''} + 3x''\dfrac{\partial f}{\partial x'''} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Aufgabe ist jetzt also darauf zurückgeführt, die gemeinsamen Lösungen

$$f(x, y, z, x', y', z', x'', \ldots z^{(m)}, \Omega)$$

der Gleichungen (10) und (14) zu ermitteln. Eine jede derselben, die $\Omega$ enthält, liefert uns eine Integralinvariante

$$\int \Omega(x, y, z, x', y', z', x'', \ldots z^{(m)})\, dt$$

der vorgelegten Gruppe $Xf$.

Wir formulieren die bisherigen Ergebnisse in dem folgenden

**Satz.** *Die Forderung, daſs die Gröſse*

$$\int \Omega(x, y, z, x', y', z', x'', \ldots z^{(m)})\, dt$$

*eine Integralinvariante einer kontinuierlichen Gruppe sei, deren infinitesimale Transformationen durch das allgemeine Symbol*

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

*gegeben sind, wird analytisch formuliert, wenn wir einerseits verlangen, daſs $\Omega$ eine Differentialinvariante der Gruppe $Xf$ sei, andererseits, daſs unser Integral zugleich invariant bei der unendlichen Gruppe*

$$Uf = \alpha(t)\frac{\partial f}{\partial t}$$

*sei.*

Wir wollen nun zeigen, daſs auch das vorliegende Problem ähnlich wie das früher behandelte im allgemeinen auf die Aufsuchung von Differentialinvarianten allein zurückkommt. Denn nehmen wir an, wir kennten eine Differentialinvariante $I$ der vorgelegten Gruppe $Xf$, die nur von den Argumenten $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ abhinge und als Funktion von $x, y, z, x', y', z', x'', \ldots$ gegeben sei. Dieselbe ist dann zugleich eine Lösung der Gleichung (10) und des Systemes (14), wenn wir in dessen erster Gleichung nur das letzte Glied weggelassen denken. Wir können sie geradezu als eine Differentialinvariante der unendlichen Gruppe

$$Xf + Uf \tag{15}$$

bezeichnen, die sowohl $Xf$ als auch alle möglichen Parametertransformationen $Uf$ umfaſst. Jedenfalls ist klar, daſs die Gröſse $I$ bei den infinitesimalen Transformationen $Uf$ invariant bleibt. Setzen wir nun

$$I' = \frac{dI}{dt}$$

und variieren wir die Gleichung

$$dI - I' dt = 0$$

im Sinne der Gruppe $Xf$, so folgt

$$X(I') = 0\,.$$

Variieren wir jene Gleichung dagegen vermöge $Uf$, so ergiebt sich

$$U(I') = -I'\alpha'.$$

Nun aber haben wir vorhin gezeigt, dafs für eine beliebige Integralinvariante

$$\int \Omega(x, y, z, x', y', z', x'', \dots z^{(m)})\, dt$$

der vorgelegten Gruppe $Xf$ stets die beiden Gleichungen

$$X(\Omega) = 0$$

und

$$U(\Omega) = -\Omega\alpha'$$

bestehen müssen. Vergleichen wir hiermit die beiden eben erhaltenen Relationen, so sehen wir, dafs das Integral

$$\int \frac{dI}{dt}\, dt$$

bei der vorgelegten Gruppe invariant ist.

So gelangen wir zu

**Theorem V.** *Ist $I$ eine Differentialinvariante einer allgemeinen Kurve $y = \varphi(x)$, $z = \chi(x)$, wobei*

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t)$$

*ist, gegenüber einer gewissen kontinuierlichen Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x, y, z$, und setzen wir voraus, dafs der Parameter $t$ bei dieser Gruppe invariant bleibt, so liefert die Formel*

$$\int \frac{dI}{dt}\, dt$$

*immer eine Integralinvariante der Gruppe.*

*Ist ferner*

$$W\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \cdots\right)$$

*irgend eine Differentialinvariante der Gruppe, so ist*

$$\int W \frac{dI}{dt}\, dt$$

*immer eine Integralinvariante und in dieser Weise werden alle Integralinvarianten der betreffenden Gruppe gefunden, die sich auf Kurven beziehen.*

Das hier ausgesprochene Theorem deckt sich, wie leicht zu sehen, mit dem früher formulierten Theorem III. Denn die soeben gefundene allgemeine Integralinvariante

$$\int W \frac{dI}{dt} dt$$

kann offenbar auch geschrieben werden

$$\int W dI,$$

eine Form, die mit der dort aufgestellten identisch ist.

Hiermit betrachten wir die allgemeine Theorie der Invarianz von Kurvenintegralen bei infinitesimalen Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes als erledigt. Man sieht, daſs sich die vorangehenden Erörterungen ohne weiteres auf den $n$fach ausgedehnten Raum übertragen lassen.

Wir werden im Folgenden noch, ehe wir weitergehen, die Ausführungen dieses Abschnittes auf ein gröſseres Beispiel anwenden.

---

## V.

## Bestimmung einer Reihe von Differential- und Integralinvarianten der Raumkurven bei der zehngliedrigen Gruppe von konformen Transformationen.

Die Gruppe der konformen Transformationen des dreifach ausgedehnten Raumes $x, y, z$ setzt sich bekanntlich*) zusammen aus zehn von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z};$$

$$y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z};$$

---

*) Vgl. Lie-Scheffers, Berührungstransformationen S. 443.

$$(-x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial x}-2xy\frac{\partial f}{\partial y}-2xz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$-2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(x^2-y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial y}-2yz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$-2xz\frac{\partial f}{\partial x}-2yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2+y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial z},$$

von denen die ersten sieben die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen mit der sechsgliedrigen invarianten Untergruppe der Euklidischen Bewegungen definieren. Die Differentialinvarianten von Flächen bei dieser Gruppe sind bereits vor einiger Zeit bestimmt worden*). Wir wollen hier unser Augenmerk auf die Invarianten der Raumkurven richten.

Denken wir uns dazu, wie im Vorigen, die Koordinaten $x$, $y$, $z$ als Funktionen eines Parameters $t$ gegeben, so haben wir, um Integralinvarianten unserer Gruppe zu bestimmen, nach den Ausführungen des Theorems V zunächst die oben gegebenen Symbole nach den Zuwüchsen der $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, ... zu erweitern, die so erhaltenen Ausdrücke gleich Null zu setzen und die gemeinsamen Lösungen des so erhaltenen zehngliedrigen vollständigen Systemes zu ermitteln.

Erweitern wir bis zu den vierten Differentialquotienten, so ergiebt sich das folgende Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

und weiter, mit Berücksichtigung dieser Relationen,

$$-z'\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{\partial f}{\partial z'}-z''\frac{\partial f}{\partial y''}+y''\frac{\partial f}{\partial z''}-z'''\frac{\partial f}{\partial y'''}+y'''\frac{\partial f}{\partial z'''}$$
$$-z^{IV}\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}+y^{IV}\frac{\partial f}{\partial z^{IV}}=0,$$

$$-y'\frac{\partial f}{\partial x'}+x'\frac{\partial f}{\partial y'}-y''\frac{\partial f}{\partial x''}+x''\frac{\partial f}{\partial y''}-y'''\frac{\partial f}{d x'''}+x'''\frac{\partial f}{\partial x'''}$$
$$-y^{IV}\frac{\partial f}{\partial x^{IV}}+x^{IV}\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}=0,$$

$$z'\frac{\partial f}{\partial x'}-x'\frac{\partial f}{\partial z'}+z''\frac{\partial f}{\partial x''}-x''\frac{\partial f}{\partial z''}+z'''\frac{\partial f}{\partial x'''}-x'''\frac{\partial f}{\partial z'''}$$
$$+z^{IV}\frac{\partial f}{\partial x^{IV}}-x^{IV}\frac{\partial f}{\partial z^{IV}}=0,$$

*) Vgl. Tresse, Acta math. Bd. 18. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations.

$$\mathsf{A}\,f = x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + z'\frac{\partial f}{\partial z'} + x''\frac{\partial f}{\partial x''} + \cdots + z^{IV}\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_1 f = {} & (-xx'+yy'+zz')\frac{\partial f}{\partial x'} - (xy'+yx')\frac{\partial f}{\partial y'} - (xz'+zx')\frac{\partial f}{\partial z'} \\ & + [-x'^2+y'^2+z'^2-xx''+yy''+zz'']\frac{\partial f}{\partial x''} \\ & - [2x'y'+xy''+yx'']\frac{\partial f}{\partial y''} - [2x'z'+xz''+zx'']\frac{\partial f}{\partial z''} \\ & + [3(-x'x''+y'y''+z'z'')-xx'''+yy'''+zz''']\frac{\partial f}{\partial x'''} \\ & - [3x'y''+3x''y'+xy'''+yx''']\frac{\partial f}{\partial y'''} - [3x'z''+3z'x'' \\ & + xz'''+zx''']\frac{\partial f}{\partial z'''} + [4(-x'x'''+y'y'''+z'z''') \\ & + 3(-x''^2+y''^2+z''^2)-xx^{IV}+yy^{IV}+zz^{IV}]\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} \\ & - [4x'y'''+4y'x'''+6x''y''+xy^{IV}+yx^{IV}]\frac{\partial f}{\partial y^{IV}} \\ & - [4x'z'''+4z'x'''+6x''z''+xz^{IV}+zx^{IV}]\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_2 f = {} & -(xy'+yx')\frac{\partial f}{\partial x'} + (xx'-yy'+zz')\frac{\partial f}{\partial y'} - (yz'+zy')\frac{\partial f}{\partial z'} \\ & - [2x'y'+xy''+yx'']\frac{\partial f}{\partial x''} + [x'^2-y'^2+z'^2+xx''-yy'' \\ & + zz'']\frac{\partial f}{\partial y''} - [2y'z'+yz''+zy'']\frac{\partial f}{\partial z''} - [3x'y''+3y'x''+xy''' \\ & + yx''']\frac{\partial f}{\partial x'''} + [3(x'x''-y'y''+z'z'')+xx'''-yy'''+zz''']\frac{\partial f}{\partial y'''} \\ & - [3y'z''+3z'y''+yz'''+zy''']\frac{\partial f}{\partial z'''} - [4x'y'''+4y'x''' \\ & + 6x''y''+xy^{IV}+yx^{IV}]\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} + [4(x'x'''-y'y'''+z'z''') \\ & + 3(x''^2-y''^2+z''^2)+xx^{IV}-yy^{IV}+zz^{IV}]\frac{\partial f}{\partial y^{IV}} \\ & - [4y'z'''+4z'y'''+6y''z''+yz^{IV}+zy^{IV}]\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0,\end{aligned}$$

$$\mathsf{A}_3 f = -(z'x + x'z)\frac{\partial f}{\partial x'} - (z'y + y'z)\frac{\partial f}{\partial y'} + (xx' + yy' - zz')\frac{\partial f}{\partial z'}$$
$$-[2x'z' + xz'' + zx'']\frac{\partial f}{\partial x''} - [2y'z' + yz'' + zy'']\frac{\partial f}{\partial y''}$$
$$+[x'^2 + y'^2 - z'^2 + xx'' + yy'' - zz'']\frac{\partial f}{\partial z''} - [3x'z'' + 3z'x''$$
$$+ xz''' + zx''']\frac{\partial f}{\partial x'''} - [3y'z'' + 3z'y'' + yz''' + zy''']\frac{\partial f}{\partial y'''}$$
$$+[3(x'x'' + y'y'' - z'z'') + xx''' + yy''' - zz''']\frac{\partial f}{\partial z'''}$$
$$-[4x'z''' + 4z'x''' + 6x''z'' + xz^{IV} + zx^{IV}]\frac{\partial f}{\partial x^{IV}}$$
$$-[4y'z''' + 4z'y''' + 6y''z'' + yz^{IV} + zy^{IV}]\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}$$
$$+[4(x'x''' + y'y''' - z'z''') + 3(x''^2 + y''^2 - z''^2) + xx^{IV}$$
$$+ yy^{IV} - zz^{IV}]\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0.$$

Die gemeinsamen Lösungen der drei ersten von den letzten sieben Gleichungen sind bereits von Lie in allgemeinster Weise bestimmt worden*). Es sind, wenn wir die in der unten citierten Arbeit gebrauchten Symbole beibehalten, die folgenden Ausdrücke

$$\omega_{11} = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$
$$\omega_{12} = x'x'' + y'y'' + z'z'', \quad \omega_{22} = x''^2 + y''^2 + z''^2;$$
$$\omega_{13} = x'x''' + y'y''' + z'z''', \quad \omega_{23} = x''x''' + y''y''' + z''z''',$$
$$\omega_{33} = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2;$$
$$\omega_{14} = x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV}, \quad \omega_{24} = x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV},$$
$$\omega_{34} = x'''x^{IV} + y'''y^{IV} + z'''z^{IV}.$$

Führen wir diese $\omega_{ik}$ in die vier letzten Gleichungen unseres Systemes ein, so wird die erste derselben

$$(1) \quad Af = \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + \omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + \omega_{22}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + \omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + \cdots$$
$$\cdots + \omega_{14}\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} + \omega_{24}\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} + \omega_{34}\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0.$$

Die zweite geht darauf unter Berücksichtigung dieser Gleichung über in

*) Vgl. Lie-Scheffers, Kontinuierliche Gruppen S. 674 ff.

$$
\begin{aligned}
A_1 f = {} & x' \omega_{11} \frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2(2x' \omega_{12} - x'' \omega_{11}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3x'' \omega_{11} \frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} \\
& + (2x' \omega_{13} + 3x' \omega_{22} - x''' \omega_{11}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 6(x' \omega_{23} + x'' \omega_{13} \\
& - x''' \omega_{12}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} - (3x' \omega_{22} - 6x'' \omega_{12} - 4x''' \omega_{11}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} \\
& + (2x' \omega_{14} + 4x' \omega_{23} - 4x'' \omega_{13} + 3x'' \omega_{22} + 4x''' \omega_{12} - x^{IV} \omega_{11}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} \\
& + (3x' \omega_{24} + 3x'' \omega_{14} + 4x' \omega_{33} + 6x'' \omega_{23} - 3x''' \omega_{22} \\
& \qquad - 3x^{IV} \omega_{12}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0.
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden, $A_2 f = 0$ und $A_3 f = 0$, folgen dann aus $A_1 f = 0$ einfach durch Vertauschung von $x$ mit $y$ und $z$ bez.

Wir setzen nun

$$
\begin{aligned}
B_1 f &= x' \cdot A_1 f + y' \cdot A_2 f + z' \cdot A_3 f, \\
B_2 f &= x'' \cdot A_1 f + y'' \cdot A_2 f + z'' \cdot A_3 f, \\
B_3 f &= x''' \cdot A_1 f + y''' \cdot A_2 f + z''' \cdot A_3 f
\end{aligned}
$$

und benutzen im folgenden an Stelle der Gleichungen $A_i f = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die von den $x', x'' \ldots y' y'' \ldots z' z'' \ldots$ freien Gleichungen

$$
(2) \left\{
\begin{aligned}
B_1 f = {} & \omega_{11}^2 \frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2 \omega_{11} \omega_{12} \frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3 \omega_{11} \omega_{12} \frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} \\
& + (\omega_{11} \omega_{13} + 3 \omega_{11} \omega_{22}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 6 \omega_{11} \omega_{23} \frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} \\
& - (3 \omega_{11} \omega_{22} - 6 \omega_{12}^2 - 4 \omega_{11} \omega_{13}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} \\
& + (\omega_{11} \omega_{14} + 4 \omega_{11} \omega_{23} + 3 \omega_{12} \omega_{22}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} \\
& + (3 \omega_{11} \omega_{24} + 4 \omega_{11} \omega_{33} + 6 \omega_{12} \omega_{23} - 3 \omega_{13} \omega_{22}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0, \\
B_2 f = {} & \omega_{11} \omega_{12} \frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2(2 \omega_{12}^2 - \omega_{11} \omega_{22}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3 \omega_{11} \omega_{22} \frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} \\
& + (2 \omega_{12} \omega_{13} + 3 \omega_{12} \omega_{22} - \omega_{11} \omega_{23}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 6 \omega_{22} \omega_{13} \frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} \\
& + (3 \omega_{12} \omega_{22} + 4 \omega_{11} \omega_{23}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} + (2 \omega_{12} \omega_{14} - 4 \omega_{22} \omega_{13} \\
& + 8 \omega_{12} \omega_{23} + 3 \omega_{22}^2 - \omega_{11} \omega_{24}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} \\
& + (3 \omega_{22} \omega_{14} + 4 \omega_{12} \omega_{33} + 3 \omega_{22} \omega_{23}) \frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$(2)\begin{cases} B_3 f = \omega_{11}\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2(2\omega_{12}\omega_{13} - \omega_{11}\omega_{23})\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} \\ \quad + 3\omega_{11}\omega_{23}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + (2\omega_{13}^2 - \omega_{11}\omega_{33} + 3\omega_{22}\omega_{13})\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} \\ \quad + 6(2\omega_{13}\omega_{23} - \omega_{12}\omega_{33})\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} + (6\omega_{12}\omega_{23} - 3\omega_{22}\omega_{13} \\ \quad + 4\omega_{11}\omega_{33})\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} + (2\omega_{13}\omega_{14} - \omega_{11}\omega_{34} + 3\omega_{22}\omega_{23} \\ \quad + 4\omega_{12}\omega_{33})\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} + (3\omega_{13}\omega_{24} + 3\omega_{23}\omega_{14} + 4\omega_{13}\omega_{33} \\ \qquad + 6\omega_{23}^2 - 3\omega_{22}\omega_{33} - 3\omega_{12}\omega_{34})\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0. \end{cases}$$

Ehe wir indessen in der Lösung dieses vollständigen Systemes fortfahren, wollen wir zunächst einen Blick auf die anderen Gleichungen werfen, die nach den Ausführungen des letzten Abschnittes für die gesuchten Funktionen bestehen müssen. Sie bilden ein zweites System von Gleichungen, das dem ersten zur Seite tritt, und nehmen, wenn wir unsere Ergebnisse auf S. 43 berücksichtigen, die folgenden Formen an

$$Gf = x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + z'\frac{\partial f}{\partial z'} + 2x''\frac{\partial f}{\partial x''} + 2y''\frac{\partial f}{\partial y''} + \cdots$$
$$\cdots + 3x'''\frac{\partial f}{\partial x'''} + \cdots + \cdots + 4x^{IV}\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} + 4y^{IV}\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}$$
$$+ 4z^{IV}\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} + \varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

$$Hf = x'\frac{\partial f}{\partial x''} + y'\frac{\partial f}{\partial y''} + z'\frac{\partial f}{\partial z''} + 3x''\frac{\partial f}{\partial x'''} + \cdots + \cdots$$
$$\cdots + 6x'''\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} + \cdots + \cdots = 0,$$

$$If = x'\frac{\partial f}{\partial x'''} + y'\frac{\partial f}{\partial y'''} + z'\frac{\partial f}{\partial z'''} + 4x''\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} + 4y''\frac{\partial f}{\partial y^{IV}}$$
$$+ 4z''\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0,$$

$$Kf = x'\frac{\partial f}{\partial x^{IV}} + y'\frac{\partial f}{\partial y^{IV}} + z'\frac{\partial f}{\partial z^{IV}} = 0.$$

Es sind also im ganzen vier Gleichungen, die zu den obigen drei hinzutreten. Bemerkt sei noch, daſs wir die Bezeichnung $\varphi$ an Stelle der im vorigen Abschnitt geschriebenen $\Omega$ gebrauchen.

Führen wir auch in diese vier Gleichungen die Ausdrücke $\omega_{ik} (i=1, 2, 3; k=1, 2, 3, 4)$ als neue Variabele ein, so werden sie

$$(3)\begin{cases} G_1 f = 2\omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + 3\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 4\omega_{22}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 4\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} \\ \qquad + 5\omega_{23}\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 6\omega_{33}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} + 5\omega_{14}\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} + 6\omega_{24}\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} \\ \qquad + 7\omega_{34}\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} + \varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \\ H_1 f = \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} \\ \qquad + (3\omega_{22} + \omega_{13})\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 6\omega_{23}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} + 6\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} \\ \qquad + (6\omega_{23} + \omega_{14})\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} + (6\omega_{33} + 3\omega_{24})\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0, \\ I_1 f = \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + \omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 2\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} + 4\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} \\ \qquad + 4\omega_{22}\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} + (4\omega_{23} + \omega_{14})\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0, \\ K_1 f = \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{14}} + \omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{24}} + \omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{34}} = 0. \end{cases}$$

Wir haben mithin die gemeinsamen Lösungen der acht Gleichungen (1), (2), (3) zu suchen.

Indessen können wir uns wiederum die Auflösung der letzten vier Gleichungen (3) ersparen. Denn bei der Bestimmung der Kurvendifferentialinvarianten der Euklidischen Bewegungen hat Lie an letztcitierter Stelle diese Gleichungen bereits integriert. Behalten wir die von Lie daselbst gebrauchte Bezeichnungsweise bei, setzen wir also*)

$$(4)\begin{cases} u = \omega_{12}\omega_{13} - \omega_{11}\omega_{23}, \quad v = \omega_{13}^2 - \omega_{11}\omega_{33}, \quad w = \omega_{12}^2 - \omega_{11}\omega_{22}, \\ \chi = u^2 - vw, \quad \psi = 3w\omega_{12} - u\omega_{11} \end{cases}$$

und nennen wir $ds$ das Bogenelement, $r$ den Krümmungsradius, $\tau$ die Torsion unserer Raumkurven, so sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (3) die folgenden

*) Vgl. im bes. Kontinuierliche Gruppen S. 678f.

$$
(5) \qquad \begin{cases}
\alpha_1 = r = \omega_{11}^{\frac{3}{2}} w^{-\frac{1}{2}}, \\
\alpha_2 = \frac{dr}{ds} = \psi w^{-\frac{3}{2}}, \\
\alpha_3 = \tau = \chi^{\frac{1}{2}} \omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-1}, \\
\alpha_4 = \frac{d^2 r}{ds^2}, \\
\alpha_5 = \frac{d\tau}{ds}.
\end{cases}
$$

Aufserdem ergiebt die erste dieser Gleichungen noch die Lösung

$$
(6) \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{\omega_{11}}}.
$$

Ehe wir diese sechs Gröfsen in die jetzt noch übrig bleibenden vier Gleichungen (1) und (2) einführen können, haben wir noch $\alpha_4$ und $\alpha_5$ ausgedrückt in den $\omega_{ik}$ zu berechnen.

Wir gewinnen diese Ausdrücke durch einfache Differentiation von $\alpha_2$ und $\alpha_3$ bezüglich nach $ds$, wenn wir nur berücksichtigen, dafs

$$
(7) \qquad ds = \sqrt{\omega_{11}}\, dt
$$

ist. Führen wir zur Abkürzung der Formeln noch die Ausdrücke

$$
\omega_1 = \omega_{22}\omega_{13} - \omega_{12}\omega_{23}, \qquad \omega_2 = \omega_{13}\omega_{23} - \omega_{12}\omega_{33},
$$
$$
\omega_3 = \omega_{12}\omega_{14} - \omega_{11}\omega_{24}, \qquad \omega_4 = \omega_{13}\omega_{14} - \omega_{11}\omega_{34}
$$

ein, so folgt zunächst

$$
\frac{dw}{dt} = 2u,
$$
$$
\frac{du}{dt} = v + \omega_1 + \omega_3,
$$
$$
\frac{dv}{dt} = 2(\omega_2 + \omega_4),
$$
$$
\frac{d\psi}{dt} = 3u\omega_{12} + 4w\omega_{13} + 3w\omega_{22} - \omega_{11}v - \omega_{11}\omega_3,
$$
$$
\frac{d\chi}{dt} = 2u(\omega_1 + \omega_3) - 2w(\omega_2 + \omega_4).
$$

Sodann ergiebt sich mit Benutzung der Relationen

$$\omega_{11}\omega_1 = \omega_{12}u - w\omega_{13},$$
$$\omega_{11}\omega_2 = \omega_{12}v - u\omega_{13}$$

nach einiger Rechnung

$$(8)\begin{cases} \alpha_4 = \omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{5}{2}} \{4w^2\omega_{13} + 3w^2\omega_{22} + \omega_{11}\chi - \omega_{11}\omega_3 w - 2u\psi\}, \\ \alpha_5 = \chi^{-\frac{1}{2}} \omega_{11}^{-1} w^{-2} \{w(u\omega_3 - w\omega_4) - 2u\chi\}. \end{cases}$$

Um jetzt die Gröſsen (5) und (6) in die Gleichungen (1) und (2) einzuführen, bilden wir

$$Aw = 2w, \quad Au = 2u, \quad Av = 2v, \quad A\psi = 3\psi, \quad A\chi = 4\chi,$$
$$A\omega_3 = 2\omega_3, \quad A\omega_4 = 2\omega_4;$$

$$A\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \ A\alpha_2 = 0, \ A\alpha_3 = -\frac{\alpha_3}{2}, \ A\alpha_4 = -\frac{\alpha_4}{2}, \ A\alpha_5 = -\alpha_5,$$

$$A\varphi_1 = -\frac{\varphi_1}{2}.$$

Weiterhin wird

$$B_1 w = 0, \ B_1 u = 3\omega_{11} w, \ B_1 v = 6\omega_{11} u, \ B_1\psi = 0, \ B_1\chi = 0,$$
$$B_1\omega_3 = 2\psi + 6\omega_{11}u, \quad B_1\omega_4 = 3\omega_{11}\omega_3 + 4v\omega_{11} + 6\omega_{12}u;$$
$$B_1\alpha_1 = 0, \quad B_1\alpha_2 = 0, \quad B_1\alpha_3 = 0, \quad B_1\alpha_4 = -2\alpha_2\sqrt{\omega_{11}},$$
$$B_1\alpha_5 = -2\alpha_3\sqrt{\omega_{11}}, \quad B_1\varphi_1 = 0.$$

Ebenso folgt

$$B_2 w = -2\omega_{11}w, \ B_2 u = -\omega_{11}u, \ B_2 v = 0, \ B_2\psi = -\omega_{11}\psi,$$
$$B_2\chi = -2\omega_{11}\chi, \ B_2\omega_3 = 3\omega_{22}w - \omega_{11}\omega_3 + 4\omega_{11}\omega_1,$$
$$B_2\omega_4 = 4\omega_{11}\omega_2 + 3\omega_{22}u;$$
$$B_2\alpha_1 = \omega_{11}\alpha_1, \quad B_2\alpha_2 = 2\omega_{11}\alpha_2, \quad B_2\alpha_3 = \omega_{11}\alpha_3,$$
$$B_2\alpha_4 = \omega_{11}\left(2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3^2 + \frac{4}{3}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} - \frac{2}{3}u\omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-1}\alpha_2\right),$$
$$B_2\alpha_5 = \omega_{11}\left(\alpha_5 + \frac{4}{3}\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{2}{3}u\omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-1}\alpha_3\right), \qquad B_2\varphi_1 = 0.$$

Endlich erhält man

$$B_3 w = -2\omega_{11}u, \quad B_3 u = -\omega_{11}(v + 3\omega_1), \quad B_3 v = -6\omega_{11}\omega_2,$$
$$B_3\psi = \omega_{11}(\omega_{11}v - 3u\omega_{12}), \quad B_3\chi = -6\omega_{12}\chi,$$
$$B_3\omega_3 = 3\omega_{23}w - 3\omega_{12}\omega_1 - \omega_{11}\omega_4,$$
$$B_3\omega_4 = 6\omega_{23}u - 3\omega_{22}v + 3\omega_{13}\omega_3 - 3\omega_{12}\omega_4$$

und eine längere Ausrechnung ergiebt

$$B_3\alpha_1 = \omega_{11} u w^{-1} \alpha_1,$$

$$B_3\alpha_2 = -\omega_{11}^{\frac{3}{2}} \alpha_1\alpha_3^2 + 2\omega_{11} u w^{-1} \alpha_2,$$

$$B_3\alpha_3 = -\omega_{11}^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} + \omega_{11} u w^{-1} \alpha_3,$$

$$B_3\alpha_4 = -\omega_{11}^{\frac{3}{2}} (\alpha_1\alpha_3\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_3^2)$$
$$+ \omega_{11} u w^{-1} \{2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3^2 + \frac{4}{3}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} - \frac{2}{3} u \omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-1} \alpha_2\}$$
$$+ 2\omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-2} \alpha_2 \{\omega_{12} u w - \omega_{13} w^2 - \omega_{11}\chi\},$$

$$B_3\alpha_5 = -\omega_{11}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1} - \alpha_3^3\right)$$
$$+ \omega_{11} u w^{-1} \{\alpha_5 + \frac{4}{3}\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{2}{3} u \omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-1} \alpha_3\}$$
$$+ 2\omega_{11}^{-\frac{1}{2}} w^{-2} \alpha_3 \{\omega_{12} u w - \omega_{13} w^2 - \omega_{11}\chi\}.$$

$$B_3\varphi_1 = 0.$$

Hiernach nehmen die letzten vier Gleichungen des Problemes ausgedrückt in den Variabelen $\alpha_1 \ldots \alpha_5$, $\varphi_1$ die folgenden Formen an:

Die Gleichung (1) geht über in

$$Bf = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} - \alpha_4 \frac{\partial f}{\partial \alpha_4} - 2\alpha_5 \frac{\partial f}{\partial \alpha_5} - \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 0.$$

Die erste der Gleichungen (2) wird einfach

$$B_1 f = \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_4} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_5} = 0.$$

Die zweite der Gleichungen (2) reduciert sich mit Berücksichtigung dieser letzten Gleichung auf

$$B_2 f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + 2\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} + (2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_4} + \alpha_5 \frac{\partial f}{\partial \alpha_5} = 0,$$

und die dritte wird endlich mit Beachtung der beiden letzten Gleichungen zunächst

$$\alpha_1\alpha_3^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} + (\alpha_1\alpha_3\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_3^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha_4} + \left(\frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1} - \alpha_3^3\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_5} = 0,$$

oder, durch $\alpha_3$ dividiert, einfacher

$$B_3 f = \alpha_1 \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} + (\alpha_1 \alpha_5 + 2\alpha_2 \alpha_3) \frac{\partial f}{\partial \alpha_4} + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1} - \alpha_3^2\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_5} = 0.$$

Diese vier Gleichungen haben wir jetzt noch zu integrieren. Sie bilden nach wie vor ein vollständiges System. Die Klammerausdrücke geben

$$(BB_1) = B_1 f, \quad (BB_2) = 0, \quad (BB_3) = 0, \quad (B_1 B_2) = 0,$$
$$(B_1 B_3) = 0, \quad (B_2 B_3) = 0.$$

Die Gleichung $B_1 f = 0$ ergiebt zunächst die Lösungen

(9) $\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_3, \quad \beta_4 = \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_5, \quad \varphi_1.$

Führen wir die letzteren in die drei anderen Gleichungen ein, so gehen diese über in

$$Cf = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_1} - \beta_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_3} - 2\beta_4 \frac{\partial f}{\partial \beta_4} - \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 0,$$
$$C_2 f = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + 2\beta_2 \frac{\partial f}{\partial \beta_2} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_3} + (3\beta_4 + \beta_1 \beta_3^3) \frac{\partial f}{\partial \beta_4} = 0,$$
$$C_3 f = \beta_1 \beta_3 \frac{\partial f}{\partial \beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\partial f}{\partial \beta_3} + 3\beta_2 \beta_3^2 \frac{\partial f}{\partial \beta_4} = 0.$$

Die Gleichung $Cf = 0$ ist äquivalent dem simultanen System

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} = \frac{d\beta_2}{0} = \frac{d\beta_3}{-\beta_3} = \frac{d\beta_4}{-2\beta_4} = \frac{d\varphi_1}{-\varphi_1}$$

und liefert als solches die Lösungen

$$\gamma_1 = \beta_2, \quad \gamma_2 = \beta_1 \beta_3, \quad \gamma_3 = \beta_1 \sqrt{\beta_4}, \quad \varphi_2 = \beta_1 \varphi_1.$$

Nach Einführung derselben in die anderen beiden Gleichungen erhält man

$$D_2 f = 2\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} + 2\gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} + \left(\frac{5}{2}\gamma_3 + \frac{1}{2}\frac{\gamma_2^3}{\gamma_3}\right) \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0,$$
$$D_3 f = \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} + \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} + \frac{3}{2}\frac{\gamma_1 \gamma_2^2}{\gamma_3} \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} = 0.$$

$D_3 f = 0$ entspricht dem Simultansystem

$$\frac{d\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{2\gamma_3 \, d\gamma_3}{3\gamma_1 \gamma_2^2} = \frac{d\varphi_2}{0}$$

mit den Integralen

$$\delta_1 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2, \quad \delta_2 = \gamma_2^3 - \gamma_3^2, \quad \varphi_2.$$

Die letzte Gleichung wird dann

$$E_2 f = 4\delta_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_1} + 5\delta_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_2} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Sie ist äquivalent dem Simultansystem

$$\frac{d\delta_1}{4\delta_1} = \frac{d\delta_2}{5\delta_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_2}$$

und liefert sofort die beiden Lösungen

$$(10) \qquad \frac{\varphi_2}{\sqrt[4]{\delta_1}} = c, \quad J = \frac{\sqrt[5]{\delta_2}}{\sqrt[4]{\delta_1}}.$$

Die erste dieser beiden Lösungen enthält offenbar $\varphi$ und da sie sonst nur von $\delta_1$ abhängig ist, so wird sie uns die *niedrigste Integralinvariante*

$$I = \int \varphi \, dt$$

bei unserer Gruppe liefern. Um die letztere ihrer wirklichen Form nach, d. h. ausgedrückt in den $\alpha_1 \dots \alpha_5$, zu ermitteln, substituieren wir in unserer ersten Lösung rückwärts gehend der Reihe nach die $\gamma_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$ und erhalten so, wenn wir gleichzeitig successive $\varphi_2$ durch $\varphi_1$, $\varphi$ ausdrücken, schliefslich die erste Lösung in der Form

$$(11) \qquad \varphi = c \frac{\sqrt{\omega_{11}}}{\alpha_1} \sqrt[4]{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_3^2}.$$

Als solche liefert sie aber mit Berücksichtigung unserer Formeln (5) und (7) die Integralinvariante

$$(12) \qquad I = \int \sqrt[4]{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \tau^2} \, \frac{ds}{r}.$$

Man kann aus dieser Form des invarianten Integrales leicht einige bemerkenswerte Folgerungen ableiten. Denn ist allgemein ein Integral der Form

$$\int \frac{A(x, y, z, y', z' \dots)}{B(x, y, z, y' \dots)} \, dx$$

bei einer vorgelegten Gruppe $Xf$ invariant, wo $A$ und $B$ ganze Funktionen ohne gemeinsamen Teiler sind, besteht also die Gleichung

$$\frac{B X(A) - A X(B)}{B^2} = - \frac{A}{B} \left(\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z'\right),$$

so besagt dieser Umstand nichts anderes, als daſs die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ einzeln bei unserer Gruppe invariant bleiben. Dasselbe läſst sich beweisen, wenn ein Integral der Form

$$\int A(x, y, z, y' \ldots) . B(x, y, z, y' \ldots)\, dx$$

bei der Gruppe $Xf$ invariant ist. Wir können daher aus unserem obigen Ergebnis ohne weiteres folgern, *daſs bei der konformen Gruppe des Raumes die folgenden Differentialgleichungen ihre Form bewahren*

$$r = 0, \quad \frac{ds}{dx} = 0, \quad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \tau^2 = 0.$$

Die ersten zwei lassen sich ersetzen durch die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$1 + y'^2 + z'^2 = 0;$$

die letzte zerfällt in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$\frac{dr}{ds} - r\tau = 0, \quad \frac{dr}{ds} + r\tau = 0,$$

die Beziehungen zwischen dem Krümmungsradius $r$, der Torsion $\tau$ und der Gröſse $\frac{dr}{ds}$ bei den invarianten Kurvenscharen darstellen. —

Das niedrigste invariante Kurvenintegral unserer Gruppe ist, wie man sieht, von dritter Ordnung. Die oben gefundene zweite Lösung $J$ ist nun sicher von vierter Ordnung. Sie ist *die niedrigste Differentialinvariante von Kurven bei unserer Gruppe.* Drücken wir sie ebenfalls successive in den $\gamma_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$ aus, so geht sie schlieſslich über in

$$J = \frac{\sqrt[5]{\alpha_1{}^3 \alpha_3{}^3 - \alpha_1{}^2 (\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_5)}}{\sqrt[4]{\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2 \alpha_3{}^2}}$$

und erhält mit Substitution der Werte (5) die Form

$$J = \frac{\sqrt[5]{r^2 \left(r\tau^3 - \tau \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d\tau}{ds}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \tau^2}}.$$

Die allgemeine Integralinvariante vierter Ordnung können wir nunmehr schreiben

$$\int W(J)\, dI,$$

wo $W$ eine willkürliche Funktion von $J$ bezeichnet. Hiermit sind aber unsere Ergebnisse noch nicht erschöpft. Wir erkennen vielmehr, *daſs man aus unserer Differentialinvariante $J$ und unserer Integralinvariante $I$ jetzt nach den Ausführungen des zweiten Abschnittes ohne weiteres je eine Differentialinvariante fünfter, sechster ... $m^{ter}$ Ordnung ableiten kann, indem man einfach bilde*

$$\frac{dJ}{dI}, \frac{d^2J}{dI^2} \cdots \frac{d^{m-4}J}{dI^{m-4}} \cdots.$$

Wir gewinnen überhaupt so *die ganze eine Reihe von Differentialinvarianten der Raumkurven bei der Gruppe aller konformen Transformationen. Die allgemeine zugehörige Integralinvariante aber besitzt dann die Form*

$$\int W\left(J, \frac{dJ}{dI}, \frac{d^2J}{dI^2} \cdots\right) dI.$$

Hierin ist $W$ eine beliebige Funktion seiner Argumente.

---

## VI.

### Allgemeine Verwertung invarianter Kurvenintegrale für die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen $x, y, z$.

Wir behandeln in diesem Abschnitt eingehender und ausführlicher die Frage, die Lie in der schon mehrfach angeführten Arbeit*) für den allgemeineren Fall erledigt hat, wie man nämlich den Umstand, daſs man ein bei der vorgelegten infinitesimalen Transformation $Xf$ invariantes Kurvenintegral von vornherein kennt, zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$, oder, anders gesagt, zur Auffindung der Bahnkurven der infinitesimalen Transformation $Xf$ in gröſstmöglicher Weise verwerten kann. In jedem Fall

*) Vgl. im besonderen Leipziger Berichte 1897, S. 401 ff.

wird sich zeigen, dafs vermöge des Bekanntseins einer Integralinvariante unserer Art sich immer Vereinfachungen im Integrationsgeschäft der Gleichung $Xf = 0$ ergeben. In einem letzten Abschnitt werden wir dann noch speziell auf die Verhältnisse zu sprechen kommen, die bei Bekanntsein invarianter Kurvenintegrale von erster Ordnung eintreten können.

Es sei also eine infinitesimale Transformation $Xf$ mit dem allgemeinen Symbol

$$(1) \qquad Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

gegeben und ein Integral von der Form

$$(2) \qquad \int \varphi(x, y, z, y', z', y'' \ldots z^{(m)})\, dx$$

bekannt, das bei ihr invariant bleibt. Aufgabe ist, die Bahnkurven der von $Xf$ erzeugten eingliedrigen Gruppe zu finden.

Hierzu müssen wir bekanntlich die lineare partielle Differentialgleichung

$$(3) \qquad Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

integrieren. Wir fragen nun, *wie sich die Integration dieser Gleichung vermöge der bekannten Integralinvariante* (2) *von* $Xf$ *vereinfacht.*

Denken wir uns zunächst, wir kennten bereits die *endlichen* Gleichungen

$$x_1 = X(x, y, z, c), \quad y_1 = Y(x, y, z, c), \quad z_1 = Z(x, y, z, c)$$

der eingliedrigen Gruppe $Xf$. Es beständen dann die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad \xi(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \zeta(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$
$$= \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

und

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1' \cdots)\, dx_1 = \varphi(x, y, z, y', z' \cdots)\, dx$$

oder

$$(5) \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1' \cdots)\frac{dx_1}{dx} = \varphi(x, y, z, y', z' \cdots),$$

deren erste uns einfach aussagt, dafs das Symbol $Xf$ bei Einführung der neuen Variabelen seine Form bewahrt,

während die letzte der Invarianz des gegebenen Integrales bei unserer Transformation entspricht.

Es hängt nun, wie Lie in der oben genannten Arbeit zeigt, alles davon ab, ob die Transformationen der eingliedrigen Gruppe $Xf$ die einzigen sind, welche die Gleichungen (4) und (5) erfüllen, oder nicht. Im ersteren Falle ergeben sich die bedeutendsten Vereinfachungen der gestellten Aufgabe. Giebt es indessen noch weitere Transformationen $x_1 = L(x,y,z)$, $y_1 = M(x,y,z)$, $z_1 = N(x,y,z)$, die unsere beiden Bedingungsgleichungen (4) und (5) erfüllen, so zeigt die Form der letzteren ohne weiteres, dafs diese Transformationen eine Gruppe bilden. Denn sind

$$x_1 = \Phi(x, y, z, c_1 \dots c_n), \quad y_1 = X(x, y, z, c_1 \dots c_n),$$
$$z_1 = \Psi(x, y, z, c_1 \dots c_n)$$

die allgemeinsten Transformationen, die den Gleichungen (4) und (5) genügen, und führen wir, indem wir den willkürlichen Konstanten $c_1 \dots c_n$ die festen Werte $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$ respektive erteilen, die beiden Transformationen

$$x_1 = \Phi(x, y, z, a_1 \dots a_n), \quad y_1 = X(x, y, z, a_1 \dots a_n),$$
$$z_1 = \Psi(x, y, z, a_1 \dots a_n),$$
$$x_2 = \Phi(x_1, y_1, z_1, b_1 \dots b_n), \quad y_2 = X(x_1, y_1, z_1, b_1 \dots b_n),$$
$$z_2 = \Psi(x_1, y_1, z_1, b_1 \dots b_n)$$

nach einander in die Gleichungen (4) und (5) ein, so folgt, gebrauchen wir für die linke Seite der Gleichung (4) das Symbol $X_1 f$ und ähnlich sodann $X_2 f$,

$$X_1 f = Xf,$$
$$X_2 f = X_1 f,$$

also auch

$$X_2 f = Xf;$$

ebenso ergiebt sich aus

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1', \cdots) \frac{dx_1}{dx} = \varphi(x, y, z, y', z', \dots),$$

$$\varphi(x_2, y_2, z_2, y_2', z_2', \cdots) \frac{dx_2}{dx_1} = \varphi(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1', \cdots)$$

die Relation

$$\varphi(x_2, y_2, z_2, y_2', z_2', \cdots) \frac{dx_2}{dx} = \varphi(x, y, z, y', z', \cdots).$$

Hiermit ist die Gruppeneigenschaft unserer Transformationen bewiesen.

Diese Gruppe kann nun unter Umständen gemischt sein. Sie enthält dann aber stets eine invariante kontinuierliche Gruppe $G$. Die letztere ist es, die, wie wir sehen werden, das Problem beherrscht.

Um diese Gruppe zu finden, setzen wir zuvörderst in unserer Gleichung (4), die offenbar für beliebige Funktionen $f(x, y, z)$ gilt, nach einander $f$ gleich $x_1$, $y_1$, $z_1$. So erhalten wir aus dieser Gleichung drei andere

$$
(6)\begin{cases}
\xi(x_1, y_1, z_1) = \xi(x,y,z)\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \eta(x,y,z)\dfrac{\partial x_1}{\partial y} + \zeta(x,y,z)\dfrac{\partial x_1}{\partial z}, \\
\eta(x_1, y_1, z_1) = \xi(x,y,z)\dfrac{\partial y_1}{\partial x} + \eta(x,y,z)\dfrac{\partial y_1}{\partial y} + \zeta(x,y,z)\dfrac{\partial y_1}{\partial z}, \\
\zeta(x_1, y_1, z_1) = \xi(x,y,z)\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \eta(x,y,z)\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \zeta(x,y,z)\dfrac{\partial z_1}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Sodann können wir in unserer zweiten Bedingungsgleichung (5) die sämtlichen Differentialquotienten $y_1'$, $z_1'$, $y_1''$ . . . ohne weiteres als Funktionen der Gröfsen $y'$, $z'$, $y''$ . . . und der partiellen Differentialquotienten von $x_1$, $y_1$, $z_1$ nach $x$, $y$, $z$ ausdrücken. Denn es ist ja

$$
(7)\begin{cases}
y_1' = \dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x} + \dfrac{\partial y_1}{\partial y}y' + \dfrac{\partial y_1}{\partial z}z'}{\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{\partial x_1}{\partial y}y' + \dfrac{\partial x_1}{\partial z}z'}, \\[2ex]
z_1' = \dfrac{dz_1}{dx_1} = \dfrac{\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial z_1}{\partial y}y' + \dfrac{\partial z_1}{\partial z}z'}{\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{\partial x_1}{\partial y}y' + \dfrac{\partial x_1}{\partial z}z'}
\end{cases}
$$

u. s. w. So erhalten wir mit Einsetzung dieser Relationen in Gleichung (5), wenn wir uns noch

$$
(8)\qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y}y' + \frac{\partial x_1}{\partial z}z'
$$

geschrieben denken, eine Beziehung der Form

$$
V\left(x_1, y_1, z_1, y', z', y'' \cdots \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} z_1}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \cdots\right) = \varphi(x, y, z, y', z' \cdots)
$$

oder einfach

$$
(9)\qquad W\left(x, y, z, x_1, y_1, z_1, y' \cdots \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} z_1}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \cdots\right) = 0.
$$

Diese Gleichung mufs nun identisch in den $y', z', y'' \ldots$ erfüllt sein. Sie zerfällt daher in eine Anzahl von Relationen

$$(10) \qquad \Omega_j\left(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial y_1}{\partial x} \cdots\right) = 0.$$

Auf diese Weise erhält man eine *Reihe partieller Differentialgleichungen, welche die Gröfsen* $x_1, y_1, z_1$ *als Funktionen von* $x, y, z$ *bestimmen. Das System der Gleichungen* (6) *und* (10) *giebt uns geradezu die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe G.*

Hier gilt nun nach den allgemeinen Lieschen Theorien der Satz, dafs sich *diese Definitionsgleichungen stets auf die Formen*

$$(11) \qquad J_k\left(x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdots\right) = B_k(x, y, z)$$

*bringen lassen, wo die* $J_k$ *Differentialinvarianten der gesuchten Gruppe G bezeichnen und überdies ein volles System von Differentialinvarianten bilden.*

Insbesondere wird es daher, wenn die Gruppe $G$ nicht mehr als zwei infinitesimale Transformationen, $Xf$ und $Yf$, enthält, unter diesen Differentialinvarianten mindestens eine von nullter Ordnung

$$J_1(x_1, y_1, z_1) = J_1(x, y, z)$$

geben, die man durch Elimination sämtlicher Ableitungen von $x_1, y_1, z_1$ nach $x, y, z$ aus den Gleichungen (11) erhält. Geben wir $x, y, z$ feste Werte, so stellt dieselbe eo ipso eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $X_1 f = 0$ dar. Zur Auffindung der zweiten Lösung haben wir dann nur an Stelle von $x_1, y_1, z_1$ etwa $x_1, y_1, J_1$ als neue Variable $Xf$ einzuführen. Die Aufgabe erfordert alsdann nach bekannten Regeln nur noch die Ausführung einer Quadratur.

Umfafst die Gruppe $G$ dagegen blos die Transformationen der eingliedrigen Gruppe $Xf$, so drückt sich dieser Umstand dadurch aus, dafs sich aus den Gleichungen (11) durch Elimination der partiellen Differentialquotienten sicher zwei Differentialinvarianten nullter Ordnung ergeben, die dann zwei von einander unabhängige Lösungen unserer Differentialgleichung $X_1 f = 0$ liefern, nämlich

$$J_1(x_1, y_1, z_1) = c_1, \quad J_2(x_1, y_1, z_1) = c_2.$$

Hierdurch sind aber die Bahnkurven der von $Xf$ erzeugten Gruppe bestimmt.

Der Natur der Sache nach sind hier eine große Anzahl Fälle möglich. Wir wollen jedoch hier nur wieder auf die schon längst von Lie veröffentlichten Arbeiten über die Theorie der Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer Gruppe*) verweisen, werden aber dann an einem specielleren Fall ein anschauliches Beispiel für unsere Ausführungen geben. Jedenfalls erkennt man, daß das ganze Problem von der Gruppe $G$ beherrscht wird.

Wir fassen unsere Hauptergebnisse noch einmal zusammen in dem

**Theorem VI.** *Ein bei der infinitesimalen Transformation*

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

*invariantes Kurvenintegral*

$$\int \varphi(x, y, z, y', z', y'' \ldots)\, dx$$

*kann stets für die Auffindung der Bahnkurven von $Xf$ verwertet werden. Ergiebt insbesondere die Untersuchung, daß die Transformationen der von $Xf$ erzeugten eingliedrigen Gruppe die einzigen sind, welche gewisse Bedingungsgleichungen* (11) *erfüllen, so erfordert die Ermittelung der Bahnkurven von $Xf$ nur ausführbare Operationen. Erhält man außer $Xf$ noch eine und nur eine von $Xf$ unabhängige infinitesimale Transformation $Yf$ der verlangten Eigenschaft, so erfordert die Lösung der Aufgabe höchstens eine Quadratur.*

*Im allgemeinen wird das Problem stets darauf zurückgeführt, die Definitonsgleichungen der endlichen Gleichungen einer Gruppe zu integrieren.*

Betrachten wir beispielsweise den Fall, daß das bekannte invariante Integral von erster Ordnung sei und dabei die Form

$$\int \Big(\alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)y' + \gamma(x, y, z)z'\Big)\, dx$$

habe. Hier wird die Gleichung (5)

---

*) Vgl. Lie, Math. Ann. Bd. 25, S. 115 ff. Leipz. Ber. 1891, S. 316 f.

$$(5') \quad [\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_1, y_1, z_1)y_1' + \gamma(x_1, y_1, z_1)z_1'] \frac{dx_1}{dx} = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)y' + \gamma(x, y, z)z'$$

nach den Substitutionen (7) und (8)

$$(9') \left\{ \begin{aligned} \alpha(x_1, y_1, z_1)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y} y' + \frac{\partial x_1}{\partial z} z'\right) + \beta(x_1, y_1, z_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + \cdots\right) \\ + \gamma(x_1, y_1, z_1)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + \cdots\right) \\ = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)y' + \gamma(x, y, z)z'. \end{aligned} \right.$$

So erhalten wir die Relationen

$$(10') \left\{ \begin{aligned} \alpha(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \beta(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + \gamma(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial z_1}{\partial x} &= \alpha(x, y, z), \\ \alpha(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial x_1}{\partial y} + \beta(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial y_1}{\partial y} + \gamma(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial z_1}{\partial y} &= \beta(x, y, z), \\ \alpha(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial x_1}{\partial z} + \beta(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial y_1}{\partial z} + \gamma(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial z_1}{\partial z} &= \gamma(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen zusammen mit dem System (6) definieren die Gruppe des Problemes. Wir sehen, dafs die Gleichungen (10′) bereits in der Form (11) auftreten. Die Gleichungen (6) können ohne weiteres ebenfalls auf diese Form gebracht werden. Wir wollen dies nicht ausführen. Wir erkennen ferner sofort, dafs sich aus diesen im ganzen sechs Gleichungen mit einem Male die sämtlichen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial z_1}{\partial z}$ eliminieren lassen, wenn wir nur die Gleichungen (6) der Reihe nach mit $\alpha(x_1, y_1, z_1)$, $\beta(x_1, y_1, z_1)$, $\gamma(x_1, y_1, z_1)$, die Relationen (10′) der Reihe nach mit $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ multiplizieren und sodann alle sechs so erhaltenen Beziehungen addieren. Es ergiebt sich

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1, z_1)\xi(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_1, y_1, z_1)\eta(x_1, y_1, z_1) \\ + \gamma(x_1, y_1, z_1)\zeta(x_1, y_1, z_1) \\ = \alpha(x,y,z)\xi(x,y,z) + \beta(x,y,z)\eta(x,y,z) + \gamma(x,y,z)\zeta(x,y,z). \end{aligned}$$

Hiermit ist eine Invariante nullter Ordnung bei der gegebenen infinitesimalen Transformation $Xf$ gefunden, und wir ge-

langen durch höchst einfache Operationen zu dem bekannten*) Satz

**Satz 1.** *Läſst eine infinitesimale Transformation*

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

*ein Integral der Form*

$$\int \alpha(x, y, z)\, dx + \beta(x, y, z)\, dy + \gamma(x, y, z)\, dz$$

*invariant, so ist der Ausdruck*

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

*stets eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung* $Xf = 0$.

Naturgemäſs können wir die Gruppe des Problemes hier nicht weiter bestimmen. Dazu ist das letztere doch noch zu allgemein. Jedenfalls ergiebt sich aber aus dem Bestehen der einen und nur einen Invariante von nullter Ordnung, daſs die Gruppe $G$ im günstigsten Falle zweigliedrig ist. In diesem Fall würde dann nur noch eine Quadratur zur Bestimmung der Bahnkurven von $Xf$ nötig sein. —

Es kann nun unter Umständen auch angebracht erscheinen, die *infinitesimalen* Transformationen der gesuchten Gruppe $G$ zu bestimmen. Wir geben im Folgenden daher in aller Kürze die Rechnungen, wie sie sich im allgemeinen für diesen Fall gestalten.

Gesetzt man hätte eine infinitesimale Transformation der gesuchten Gruppe $G$, etwa

$$(12) \quad Uf = \lambda(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \mu(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \nu(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dieselbe bestimmt dann eine endliche Transformation, deren Reihenentwickelung beginnt

$$(13) \quad x_1 = x + \lambda(x, y, z)\delta t + \cdots, \quad y_1 = y + \mu(x, y, z)\delta t + \cdots,$$
$$z_1 = z + \nu(x, y, z)\delta t + \cdots.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in unsere fundamentalen Gleichungen (5) und (6) ein, so folgen zunächst nach den letzteren die Relationen

---

*) Vgl. Lie, Leipziger Ber. 1897, S. 354f. — Königs, Comptes Rendus, Paris, 9. Dez. 1895.

$$(14) \qquad \begin{cases} U(\xi) = X(\lambda), \\ U(\eta) = X(\mu), \\ U(\zeta) = X(\nu). \end{cases}$$

Dieselben sagen aus, daſs jedenfalls die Transformationen $Uf$ mit $Xf$ vertauschbar sein müssen. Weiter geht Gleichung (5) über in

$$[\varphi(x,y,z,y',z'\cdots) + U(\varphi)\,\delta t + \cdots]\,[1 + \frac{d\lambda}{dx}\delta t + \cdots]$$
$$= \varphi(x,y,z,y',z'\ldots),$$

oder man hat mit Vernachlässigung unendlich kleiner Gröſsen von höherer als erster Ordnung

$$(15) \qquad U(\varphi) + \varphi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\,y' + \frac{\partial\lambda}{\partial z}z'\right) = 0.$$

Es ist dies wieder die schon früher aufgestellte Bedingung dafür, daſs unser Integral bei den infinitesimalen Transformationen $Uf$ invariant sei. Wir haben also das allgemeine Symbol $Uf$ nach den im ersten Abschnitt gegebenen Regeln zu erweitern und die so erhaltene erweiterte Transformation auf die Gröſse $\varphi$ ausgeübt in Gleichung (15) einzusetzen. Auf diese Weise folgt eine Gleichung von der Form

$$(16) \quad W'\left(x,y,z,y',z'\cdots,\lambda,\mu,\nu,\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdots\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\cdots\frac{\partial^3\nu}{\partial z^3}\cdots\right) = 0,$$

welche identisch in den $y', z' \ldots$ gelten muſs und also in eine Anzahl Relationen

$$(17) \qquad \Omega_j'\left(x,y,z,\lambda,\mu,\nu,\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdots\right) = 0$$

zerfällt. Die Gleichungen (14) und (17) zusammen bilden die *Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe*, indem sie die Gröſsen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ als Funktionen von $x, y, z$ bestimmen. Sie können bekanntlich*), wenn ihre allgemeinen Lösungen nur von Konstanten abhängen, durch Differentiation und Elimination *auf eine Form gebracht werden, in welcher sich alle partiellen Differentialquotienten einer gewissen Ordnung durch die niederen und etwa noch durch $x$, $y$, $z$ ausdrücken, während dasselbe für*

*) Vgl. Theorie der Transformationsgruppen Bd. I, S. 185 ff.

*die Differentialquotienten der nächst niederen Ordnung nicht der Fall ist.* Auch hier können sich unter Umständen ohne weiteres Lösungen von $Xf = 0$ ergeben; es hängt dies naturgemäfs vom besonderen Fall ab.

Wir wollen zum Schlufs noch, indem wir hiermit die Aufgabe, die wir uns im gegenwärtigen Abschnitt gestellt hatten, für erledigt erachten, auch die zuletzt gegebene Theorie auf unser oben betrachtetes Beispiel anwenden, um zu sehen, wie sich hierbei die Behandlung gestaltet.

Es habe also das bei $Xf$ invariante Integral die Form

$$\int [\alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)y' + \gamma(x, y, z)z']dx.$$

Die Gleichung (15) wird hierfür

$$(15')\begin{cases} U(\alpha) + U(\beta)y' + U(\gamma)z' \\ + \beta\left(\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y}y' + \frac{\partial\mu}{\partial z}z' - y'\frac{\partial\lambda}{\partial x} - y'^2\frac{\partial\lambda}{\partial y} - y'z'\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) \\ + \gamma\left(\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\nu}{\partial y}y' + \frac{\partial\nu}{\partial z}z' - z'\frac{\partial\lambda}{\partial x} - y'z'\frac{\partial\lambda}{\partial y} - z'^2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) \\ + [\alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z)y' + \gamma(x,y,z)z']\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}y' + \frac{\partial\lambda}{\partial z}z'\right) = 0. \end{cases}$$

Diese zerfällt aber in die drei Relationen

$$(17')\begin{cases} U(\alpha) + \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0, \\ U(\beta) + \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\nu}{\partial y} = 0, \\ U(\gamma) + \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial z} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\nu}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Die letzteren bestimmen mit den Gleichungen (14) zusammen die Gruppe des Problemes in ihren infinitesimalen Transformationen. Multiplizieren wir die Gleichungen (17′) mit $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ bezüglich und addieren sodann, so ergiebt sich

$$(18)\quad U(\alpha)\xi + U(\beta)\eta + U(\gamma)\zeta + \alpha X(\lambda) + \beta X(\mu) + \gamma X(\nu) = 0,$$

oder nach den Beziehungen (14)

$$(19)\quad U(\alpha)\xi + U(\beta)\eta + U(\gamma)\zeta + U(\xi)\alpha + U(\eta)\beta + U(\zeta)\gamma = 0.$$

Das Bestehen dieser Gleichung drückt aber bekanntlich dasselbe aus, was wir oben als Ergebnis erhielten, dafs nämlich die Gröfse

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

eine Lösung der Gleichung $Uf = 0$, also auch der Gleichung $Xf = 0$ ist.

Um ferner unsere Definitionsgleichungen (14) und (17′) auf die oben gekennzeichnete kanonische Form zu bringen, differentiieren wir die erste der Gleichungen (17′) partiell nach $y$, die zweite nach $x$; sodann die erste nach $z$, die dritte nach $x$; schliefslich die zweite nach $z$, die dritte nach $y$. So erhalten wir drei Paare von Gleichungen, die indessen noch die zweiten Differentialquotienten von $\lambda, \mu, \nu$ nach $x, y, z$ enthalten. Wir eliminieren die letzteren durch Subtraktion. Es ergeben sich dabei noch drei weitere in den ersten partiellen Differentialquotienten von $\lambda, \mu, \nu$ nach $x, y, z$ lineare Gleichungen zu unseren obigen sechs von (14) und (17′) hinzu. Aus diesen im ganzen neun in den ersten partiellen Differentialquotienten von $\lambda, \mu, \nu$ nach $x, y, z$ linearen Gleichungen lassen sich von den letzteren, ebenfalls neun an der Zahl, im besten Falle acht als Funktionen von $\lambda, \mu, \nu, x, y, z$ ausdrücken. Aufserdem besteht nun noch die von jenen Differentialquotienten freie Relation (19) in den Gröfsen $\lambda, \mu, \nu, x, y, z$.

Hieraus erkennt man wiederum, dafs im günstigsten Falle die Gruppe $G$ zweigliedrig ist, ein Resultat, zu dem wir schon oben gelangten.

Wir wollen schliefslich die Bemerkung nicht unterlassen, dafs sich das in diesem Abschnitt behandelte Problem, wie man leicht sieht, nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern läfst. Unter andern könnten mehrere bei $Xf$ invariante Kurvenintegrale gegeben sein. In diesem Fall würde dann auch unser Theorem II ausgiebige Verwertung finden. Ziehen wir z. B. wieder den in Satz 1 dieses Abschnittes formulierten Fall in Betracht, so ergiebt sich ohne weiteres

**Satz 2.** *Läfst die infinitesimale Transformation*

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

*die beiden Integrale*

$$\int[\alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)y' + \gamma(x, y, z)z']\,dx$$

und

$$\int M(x, y, z)\,(\alpha + \beta y' + \gamma z')\,dx$$

*invariant, so sind die beiden Gröfsen*

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

*und*

$$M(x, y, z)$$

*Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung* $Xf = 0$.

Man kennt also hier im günstigsten Falle die Bahnkurven der von $Xf$ erzeugten eingliedrigen Gruppe von vornherein.

---

## VII.

### Zusammenhang gewisser invarianter Kurvenintegrale erster Ordnung mit invarianten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und dementsprechende Verwertung derselben.

Während die im vorigen Abschnitt gegebene Theorie betreffend die Verwertung bekannter Kurvenintegralinvarianten zur Bestimmung der Bahnkurven der sie invariant lassenden infinitesimalen Transformation $Xf$ in allen Fällen anwendbar ist, geben wir im folgenden noch einige besondere Anweisungen zur Verwertung gewisser invarianter Kurvenintegrale erster Ordnung, die mit den von Lie gegebenen Regeln für die Verwertung invarianter Flächenintegrale sich stellenweise nahe berühren werden.

Wir nehmen wieder an, eine infinitesimale Transformation

$$(1) \qquad Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

sei vorgelegt und ein bei ihr invariantes Kurvenintegral sei bekannt. Es habe die Form

$$(2) \qquad \int \varphi(x, y, z, y', z')\, dx,$$

wobei wir ein für allemal voraussetzen wollen, dafs die Funktion $\varphi$ nicht linear in $y'$, $z'$ sei. Die Aufgabe ist, unser invariantes Integral zur Auffindung der Bahnkurven von $Xf$ zu verwerten.

Das Bestehen der Integralinvariante (2) hat nun nach Satz 1 des ersten Abschnittes die Bedeutung, dafs die Gleichung

$$(3) \qquad \varphi(x, y, z, y', z') = 0$$

bei der infinitesimalen Transformation $Xf$ invariant bleibt, indem die Relation

$$(4) \qquad X'(\varphi) = -\varphi(\xi_x + \xi_y y' + \xi_z z')$$

besteht, wenn wir mit $X'f$ das Symbol der einmal erweiterten infinitesimalen Transformation $Xf$ bezeichnen.

Betrachten wir nun einmal die Gleichung $\varphi = 0$! Denken wir uns darin

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

gesetzt, so erhalten wir offenbar eine in den Differentialen $dx$, $dy$, $dz$ homogene Gleichung

$$(5) \qquad \psi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

d. h. eine sogenannte Mongesche Gleichung. Jedem Punkte des Raumes $x, y, z$ wird durch sie ein Kegel von $\infty^1$ Fortschreitungsrichtungen zugeordnet mit dem Punkt selbst als Spitze*). Von Singularitäten sehen wir ab. Gehen wir von einem allgemeinen Punkte aus längs irgend eines von ihm ausgehenden Linienelementes, welches der Gleichung (5) genügt, bis zum unendlich benachbarten Punkte und von diesem aus wieder einer Fortschreitungsrichtung seines Elementarkegels nach, so beschreiben wir, fahren wir so fort, eine Integralkurve unserer Mongeschen Gleichung $\psi = 0$, deren es hiernach $\infty^\infty$ giebt. Wir können uns dieselben beliebig in Flächen geordnet denken.

Die Invarianz der Mongeschen Gleichung (5) bei Ausführung von $Xf$ hat nun aber bekanntlich die geometrische Bedeutung, dafs unsere Transformation $Xf$ die Integralkurven der Gleichung $\psi = 0$ unter einander vertauscht, indem sie diese längs ihrer $\infty^2$ Bahnkurven in einander überführt. Es entstehen so, da wir die $\infty^2$ Bahnkurven von $Xf$, welche den Raum erfüllen, auf alle mögliche Weise in Scharen zu $\infty^1$, d. h. zu Flächen, zusammenfassen können, $\infty^\infty$ viele Flächen, die zugleich von je $\infty^1$ dieser Bahnkurven und $\infty^1$ Integralkurven der Mongeschen Gleichung $\psi = 0$ erzeugt sind. Unter diesen Flächen, die zusammen sämtliche Integralkurven unserer Mongeschen Gleichung sowie sämtliche Bahn-

*) Vgl. Lie-Scheffers, Berührungstransfn. Absch. II, Kap. 7.

kurven von $Xf$ enthalten, befinden sich nun insbesondere*) $\infty^1$ solche, die in allen ihren Punkten von den diesen zugeordneten Elementarkegeln berührt werden. Dieselben sind dann zugleich Integralflächen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die nach bekannten Regeln unserer Mongeschen Gleichung $\psi = 0$ entspricht und die überhaupt alle Flächen darstellt, die in jedem ihrer Punkte von dem ihm durch unsere Mongesche Gleichung zugeordneten Elementarkegel berührt werden. Diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung wird bekanntlich erhalten, wenn man die Gröfsen $dx$, $dy$, $dz$, an deren Stelle wir uns auch nach Division unserer Gleichung $\psi = 0$ durch $dt$ die Gröfsen $x'$, $y'$, $z'$ geschrieben denken können, aus den drei Gleichungen

$$\psi(x, y, z, x', y', z') = 0,$$

$$p = -\frac{\psi_{x'}}{\psi_{z'}}, \quad q = -\frac{\psi_{y'}}{\psi_{z'}}$$

eliminiert. Wir wollen diese partielle Differentialgleichung mit

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0 \tag{6}$$

bezeichnen. Sie ist in $p$ und $q$ von demselben Grade wie die ursprüngliche Gleichung $\psi = 0$ in den Gröfsen $dx$, $dy$, $dz$, d. h. nach Voraussetzung nicht linear in $p$ und $q$.

Hiermit haben wir aber den Anschlufs an Lies Theorie der Verwertung eines invarianten Flächenintegrales zur Integration der Gleichung $Xf = 0$ erreicht**). Denn der Umstand, dafs unsere partielle Differentialgleichung (6) $\infty^1$ Integralflächen besitzt, die zugleich von Bahnkurven der infinitesimalen Transformation $Xf$ erzeugt werden, drückt sich analytisch dadurch aus, dafs die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0 \tag{7}$$

$\infty^1$ gemeinsame Integralflächen

$$u(x, y, z) = \text{const}$$

besitzen, indem eine Relation

$$X(\Phi) = \varrho(x, y, z, p, q)\Phi \tag{8}$$

*) Vgl. zum Folgenden Lie-Scheffers, Berührungstransfn. S. 260 ff.
**) Vgl. Lie, Leipziger Berichte 1897. S. 387 ff.

besteht, die nichts anderes aussagt, als die selbstverständliche Thatsache, dafs die partielle Differentialgleichung $\Phi = 0$ von unserer infinitesimalen Transformation $Xf$ invariant gelassen wird.

Diese $\infty^1$ gemeinsamen Integralflächen $u = \text{const.}$ werden nun nach bekannten Regeln durch Integration einer totalen Differentialgleichung

$$dz - P(x, y, z)\, dx - Q(x, y, z)\, dy = 0$$

gefunden, die in diesem Falle stets die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Hierin sind $P(x, y, z)$ und $Q(x, y, z)$ die Werte, die sich durch Auflösung des Gleichungssystemes (7) nach $p$ und $q$ für diese Gröfsen respektive ergeben. Die Gröfse $u(x, y, z) = \text{const.}$ ist aber dann eo ipso eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$. Die noch fehlende Lösung $v$ findet man schliefslich nach bekannten Regeln durch Integration einer weiteren gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, die wir erhalten, indem wir etwa $x, y, u$ an Stelle von $x, y, z$ als neue Variabele in $Xf = 0$ einführen.

Wir sehen also, dafs wir auf jeden Fall *die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ vermöge einer bekannten Kurvenintegralinvariante erster Ordnung der Transformation $Xf$ zurückgeführt haben auf zwei aufeinanderfolgende Integrationen zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Dieser Fall vereinfacht sich jedoch noch bedeutend, wenn die Gleichung $\Phi = 0$ in der Weise von $Xf$ invariant gelassen wird, dafs unser Faktor $\varrho$ in Gleichung (8) die Form hat

$$\varrho(x, y, z, p, q) \equiv -(\xi_x + \xi_z p + \eta_y + \eta_z q),$$

wenn also die Beziehung gilt

$$X(\Phi) + (\xi_x + \xi_z p + \eta_y + \eta_z q)\, \Phi = 0. \tag{9}$$

Diese Relation besagt nämlich nach Lies Untersuchungen an letztgenannter Stelle, dafs auch das Flächenintegral

$$\int \Phi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

bei unserer Transformation $Xf$ invariant bleibt.

Dafs dieser Fall vorkommen kann, lehrt uns z. B. ein Blick auf die im zweiten Beispiel des ersten Abschnittes

untersuchte Gruppe der Euklidischen Bewegungen. Hier fanden wir ein invariantes Kurvenintegral erster Ordnung von der Form

$$\int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Es ist hier also

$$\varphi \equiv 1 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Dieser Gleichung entspricht aber die partielle Differentialgleichung

$$\Phi \equiv 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

und die Untersuchung zeigt, daſs auch das Flächenintegral

$$\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

bei unserer Gruppe invariant bleibt*).

In diesem Fall gelten nun ohne weiteres die von Lie in der erwähnten Abhandlung aufgestellten Sätze für die Verwertung invarianter Flächenintegrale erster Ordnung. Wir können also die daselbst gefundenen Ergebnisse mit den unseren hier zusammenfassen in dem folgenden

**Theorem VII.** *Kennt man ein Kurvenintegral*

$$\int \varphi(x, y, z, y', z')\, dx,$$

*das bei der infinitesimalen Transformation Xf invariant bleibt, wobei die Funktion φ nicht linear in den Gröſsen y' und z' ist, so bleibt auch die Mongesche Gleichung*

$$\psi(x, y, z, x', y', z') = 0$$

*invariant, die wir erhalten, wenn wir in der Gleichung*

$$\varphi(x, y, z, y', z') = 0$$

*symbolisch setzen*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'}.$$

*Dann bewahrt ferner auch die in p und q nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

*die wir durch Elimination der homogen auftretenden Gröſsen x', y', z' aus den drei Gleichungen*

*) Vgl. die letzte Anmerkung auf S. 15.

$$\psi = 0, \quad p = -\frac{\psi_{x'}}{\psi_{z'}}, \quad q = -\frac{\psi_{y'}}{\psi_{z'}}$$

*erhalten, ihre Form bei unserer Transformation $Xf$ derart, dafs*

$$X(\Phi) = \varrho(x, y, z, p, q)\,\Phi$$

*wird.*

*Die beiden Gleichungen*

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

*können nun jedenfalls nach einer passenden Vertauschung der Gröfsen $x, y, z$ nach $p$ und $q$ aufgelöst werden:*

$$p = P(x, y, z), \quad q = Q(x, y, z).$$

*Bildet man dann die totale Differentialgleichung*

$$dz - P(x, y, z)\,dx - Q(x, y, z)\,dy = 0,$$

*so ist dieselbe integrabel und ihr Integral $u(x,y,z) = c$ immer eine Lösung von $Xf = 0$, deren noch fehlende Lösung sodann durch eine weitere Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden wird.*

*Besteht daneben die Identität*

$$\varrho(x, y, z, p, q) \equiv (\xi_x + \xi_z p + \eta_y + \eta_z q),$$

*so ist auch das Flächenintegral $\int \Phi\,dx\,dy$ bei unserer Transformation $Xf$ invariant. Dann ist, setzen wir*

$$(\Phi_p)_{p=P, q=Q} = \alpha, \quad (\Phi_q)_{p=P, q=Q} = \beta, \quad \alpha P + \beta Q = \gamma,$$

*die Gröfse $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ immer ein Jakobischer Multiplikator der Gleichung $Xf = 0$, und da $P$ und $Q$ im allgemeinen als mehrdeutige Funktionen von $x, y, z$ gefunden werden, so erhalten wir mehrere solche Multiplikatoren, d. h. die Integration von $Xf = 0$ verlangt in diesem Falle nur ausführbare Operationen.*

Hiermit haben wir die von Lie am Schlusse der oben erwähnten Betrachtungen gemachten Andeutungen bezüglich der Verwertung invarianter Kurvenintegrale ausgeführt.

# Inhalt.

## Vita.

Am 4. Februar 1877 zu Technitz bei Döbeln als Sohn des Kaufmanns Carl Heineck geboren, besuchte ich, evangelisch-lutherischer Konfession, nachdem meine Eltern nach Dresden übergesiedelt waren, daselbst das Bochowsche Lehrinstitut und von Ostern 1886 bis Ostern 1895 das Königliche Gymnasium zu Dresden-Neustadt. Darauf studierte ich vier Semester an der technischen Hochschule zu Dresden Mathematik und Naturwissenschaften und bezog dann die Universität Leipzig, wo ich bis jetzt meinen Studien oblag.

Allen meinen verehrten Herren Lehrern schulde ich herzlichen Dank. Die meiste geistige Anregung verdanke ich in Dresden den Herren Geheimrat Prof. Dr. Krause und Prof. Dr. Helm, in Leipzig aber ganz besonders Herrn Prof. Dr. Lie und Herrn Geheimrat Prof. Dr. Wundt.

Da Herr Prof. Dr. Lie die Universität Leipzig verliefs, so war es mir leider unmöglich, die vorliegende vollständig aus seinen Theorien heraus entstandene Arbeit seiner Begutachtung zu unterstellen. Herrn Prof. Dr. Engel daher auch an dieser Stelle für sein liebenswürdiges Entgegenkommen meinen aufrichtigsten Dank!

---

